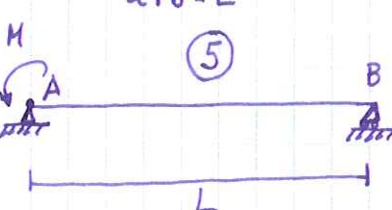
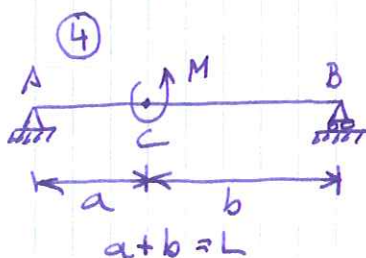
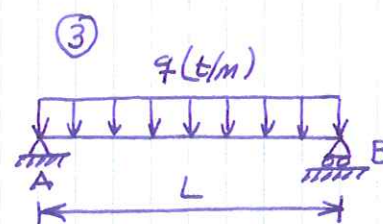
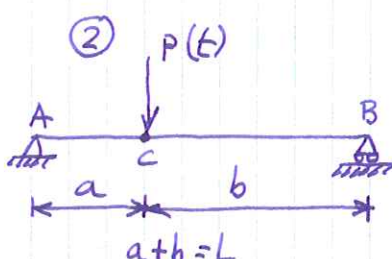
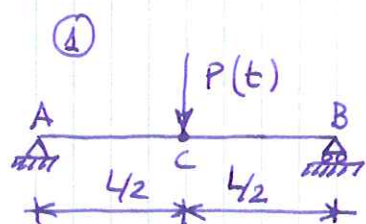


CALCULO DE REACCIONES Y LEYES DE ESFUERZOS EN ESTRUCTURAS ISOSTATICAS

35

EJERCICIO 33

obtener las reacciones en los apoyos y las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes para las siguientes estructuras.



Resolución

Metodología para la resolución de los ejercicios

1. Ver si la estructura es isostática o hiperestática.

Plantear el diagrama de sólido libre: la estructura se libera de sus apoyos y se colocan las reacciones, junto con las cargas exteriores.

Sea $N_R = \text{n}^\circ \text{ de reacciones}$

si $N_R = 3 \Rightarrow$ ESTRUCTURA ISOSTÁTICA: Las reacciones se obtienen en las ecuaciones de la estática: $\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M = 0$

si $N_R > 3 \Rightarrow$ ESTRUCTURA HIPERESTÁTICA: $N^\circ \text{ HIPERESTÁTICAS} = N_R - 3$. Además de las ecuaciones de la estática se necesitan tantas ecuaciones

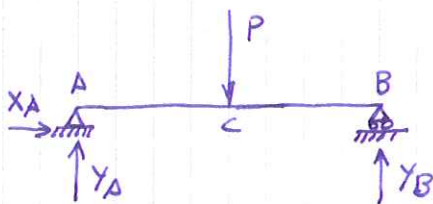
ciones adicionales de compatibilidad de movimientos como n° de hiperestáticas. para obtener las reacciones.

2.- calcular las reacciones.

3.- obtener las leyes de esfuerzos : axiles, momentos flectores y cortantes.

Estructura ①

Reacciones:



Como no hay fuerzas exteriores horizontales $X_A = 0$

N° de reacciones = 2 Y_A y Y_B

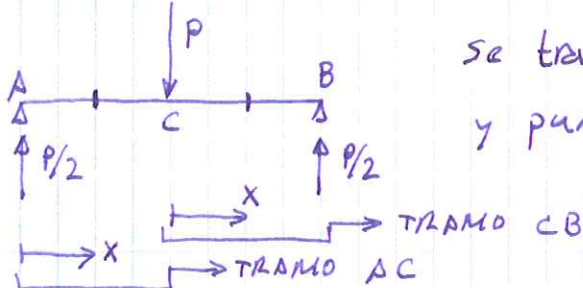
N° de ecuaciones = 2 $\sum Y = 0$
 $\sum M = 0$ } $\Rightarrow$ Estructura isostática.

signos 

$$\left. \begin{array}{l} \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} Y_A + Y_B - P = 0 \\ Y_B \cdot L - P \cdot L/2 = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Resolviendo} \\ Y_A = \frac{P}{2} \\ Y_B = \frac{P}{2} \end{array} \right\}$$

leyes de esfuerzos

Momentos:



se tramiñifica la estructura entre apoyos y puntos de aplicación de las cargas

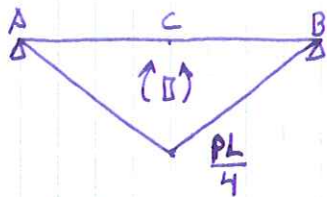
TRAMO CB : $M(x)$: momento a la distancia x de C

$M(x) = \frac{P}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right) \Rightarrow$ Ecuación de una recta

si $x = 0$ $M_C = \frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{PL}{4}$, si $x = \frac{L}{2}$ $M_B = \frac{P}{2} \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2} \right) = 0$

TRAMO AC : $M(x) = \frac{P}{2}(L-x) - P\left(\frac{L}{2}-x\right) = \frac{P}{2}x \Rightarrow$ ecuación de una recta

$$x=0 \quad M_A = \frac{P}{2} \cdot 0 = 0 ; \quad x = \frac{L}{2} \quad M_C = \frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{PL}{4}$$



constantes :

se tramifica igual que para obtener la ley de momentos

TRAMO CB : $Q(x)$ constante a la distancia x de C

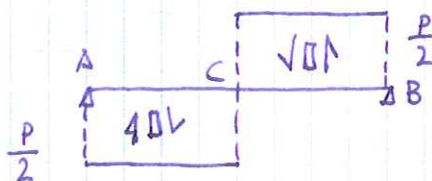
$Q(x) = \frac{P}{2}$ se trasladan las fuerzas frontales, a la derecha de la sección

signo $\downarrow \uparrow$ que se considera negativo

TRAMO AC : $Q(x)$ constante a la distancia x de A

$Q(x) = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$ se trasladan las fuerzas frontales, a la derecha de la sección

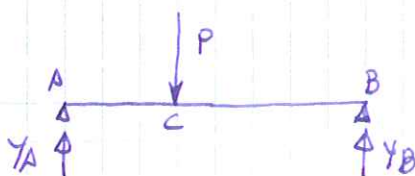
signo $\uparrow \downarrow$ que se considera negativo



En los puntos de cargas concentradas (C) la ley de constantes es discontinua. El salto en la discontinuidad coincide con el valor de la fuerza concentrada.

Estructura (2)

Reacciones



N° de reacciones = 2 Y_A, Y_B
 N° de ecuaciones = 2 $\sum Y = 0$
 $\sum M = 0$

Estructura isostática

signos $\uparrow +$

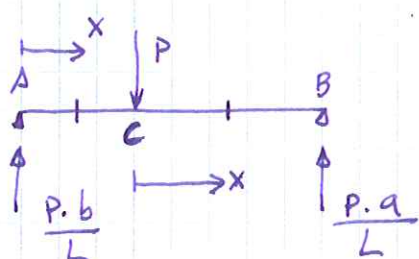
$$\left. \begin{array}{l} \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} Y_A + Y_B - P = 0 \\ Y_B \cdot L - P \cdot a = 0 \end{array} \quad \text{resolviendo}$$

$$Y_A = \frac{P \cdot b}{L}$$

$$Y_B = \frac{P \cdot a}{L}$$

leyes de esfuerzos

Momentos :



TRAMO CB : $M(x) = \frac{P \cdot a}{L} (b - x) \uparrow +$

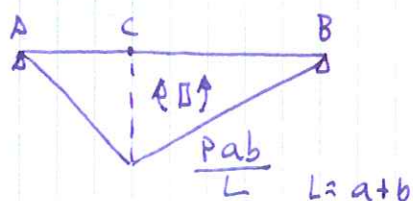
$x = 0 \quad M_C = \frac{P \cdot a}{L} (b - 0) = \frac{P \cdot ab}{L} \uparrow \uparrow$
 $L = a + b$

$x = b \quad M_B = \frac{P \cdot a}{L} (b - b) = 0$

TRAMO AC : $M(x) = \frac{P \cdot a}{L} (L - x) - P(a - x) = -\frac{P \cdot a}{L} x + Px = Px(1 - \frac{a}{L}) =$

$= \frac{P \cdot b}{L} x \uparrow +$
 $L = a + b$

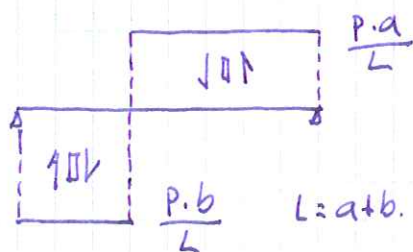
$x = 0 \quad M_A = \frac{P \cdot b}{L} \cdot 0 = 0 ; x = a \quad M_C = \frac{P \cdot ab}{L} \uparrow \uparrow$



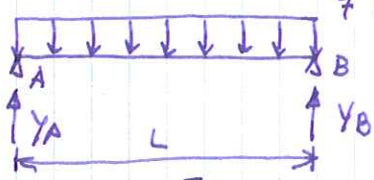
cutantes

TRAMO CB : $Q(x) = \frac{P \cdot a}{L} \downarrow \downarrow +$

TRAMO AC : $Q(x) = \frac{P \cdot a}{L} - P = -\frac{P \cdot b}{L} \downarrow \downarrow -$
 $L = a + b$



Estructura (3)



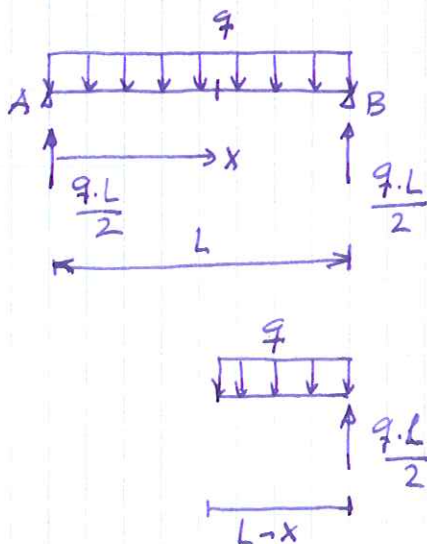
q (k/m) N° de reacciones = 2, Y_A, Y_B
 N° de ecuaciones = 2 $\sum Y = 0$
 $\sum M = 0$ } Estructura isostática

signos $\uparrow +$ $\sum Y = 0$ $Y_A + Y_B - q \cdot L = 0$
 $\sum M_A = 0$ $Y_B \cdot L - \underbrace{q \cdot L}_{\text{carga total}} \cdot \underbrace{\frac{L}{2}}_{\text{brazo concentrado en } \frac{L}{2}} = 0$ } Resolviendo

$Y_A = \frac{q \cdot L}{2}$
 $Y_B = \frac{q \cdot L}{2}$

Leyes de esfuerzos

Momentos



Como no hay cargas concentradas no se transfiere

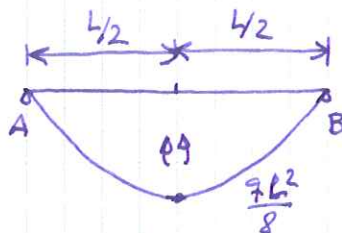
TRAMO AB $M(x) = \frac{q \cdot L}{2} (L-x) - q(L-x) \frac{L-x}{2} \uparrow +$

$M(x) = \frac{q}{2} (L-x) [L - (L-x)] = \frac{q \cdot x}{2} (L-x) \uparrow +$

Ecuación de una parábola de segundo grado.

$x=0 \quad M_A = 0 ; \quad x=L \quad M_B = 0$

$x = \frac{L}{2} \quad M(x=\frac{L}{2}) = \frac{q \cdot L/2}{2} (L - \frac{L}{2}) = \frac{q L^2}{8} \uparrow +$



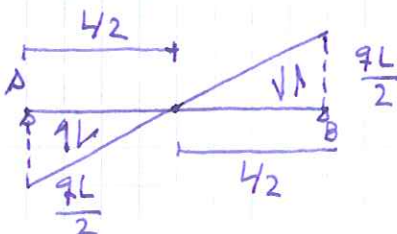
Constantes

TRAMO AB $Q(x) = \frac{q \cdot L}{2} - q(L-x) = q(x - \frac{L}{2}) \downarrow +$

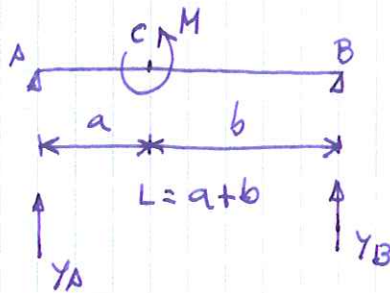
Ecuación de una recta

$x=0 \quad Q_A = -qL/2 \quad \downarrow -$

$x=L \quad Q_B = qL/2 \quad \uparrow +$



Estructura (4)



Como el resto de las estructuras también es isostática.

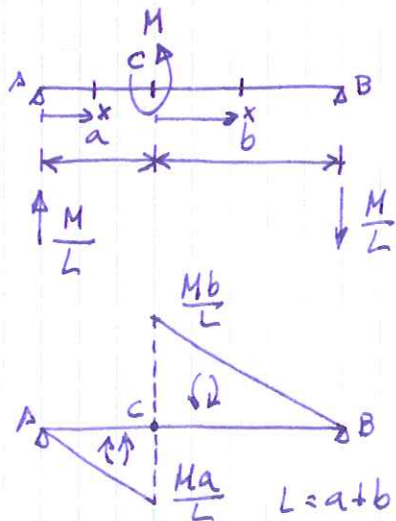
signos $\uparrow +$

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 & \quad Y_A + Y_B = 0 \\ \sum M_A = 0 & \quad Y_B \cdot L + M = 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Resolviendo} \\ Y_A = \frac{M}{L} \\ Y_B = -\frac{M}{L} \end{array} \right.$$

como $Y_B = -\frac{M}{L}$ nos ha salido con signo negativo, entonces el sentido es contrario al indicado

leyes de esfuerzos

Momentos



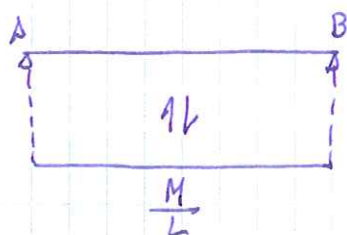
como en $\subseteq$ existe un momento concentrado se transmite

TRAMO CB $M(x) = -\frac{M}{L}(b-x) \downarrow$
 $x=0 \quad M_C = \frac{Mb}{L}, \quad x=b \quad M_B = 0$

TRAMO AC $M(x) = M - \frac{M}{L}(L-x) \uparrow$
 $M(x) = \frac{M}{L}x \uparrow$
 $x=0 \quad M_A = 0; \quad x=a \quad M_C = \frac{Ma}{L} \uparrow$

En el punto C el salto en la discontinuidad de la ley de momentos es $\frac{Mb}{L} + \frac{Ma}{L} = \frac{M(a+b)}{L} = M$
 $\hookrightarrow L = a+b$

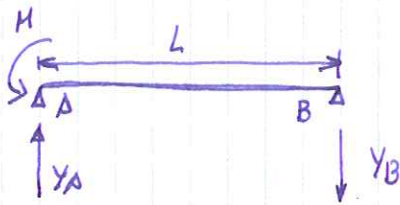
Cortantes



TRAMO CB $Q(x) = -\frac{M}{L} \downarrow$

TRAMO AC $Q(x) = -\frac{M}{L} \downarrow$

Estructura ⑤



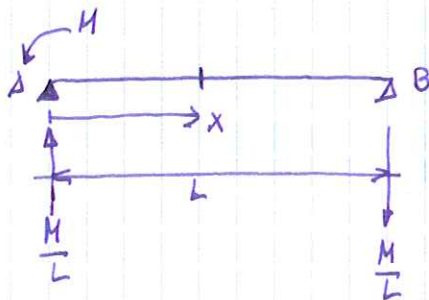
Estructura isostática



$$\left. \begin{aligned} \sum Y &= 0 & Y_A + Y_B &= 0 \\ \sum M_A &= 0 & -Y_B \cdot L + M &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Resolviendo}$$

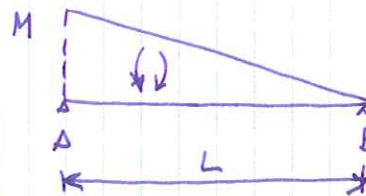
$$Y_A = \frac{M}{L}$$

$$Y_B = \frac{M}{L}$$

Leyes de esfuerzos
Momentos

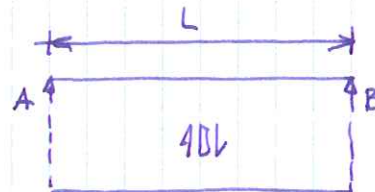
TRAMO AB $M(x) = M - \frac{M}{L}(L-x) = \frac{M \cdot x}{L}$ ↗

$x=0$ $M_A = -M$; $x=L$ $M_B = 0$



Cortantes

TRAMO AB $Q(x) = -\frac{M}{L}$ 1L

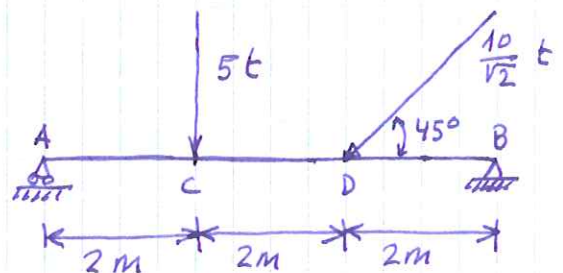


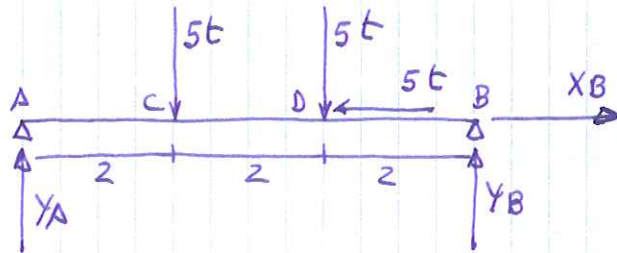
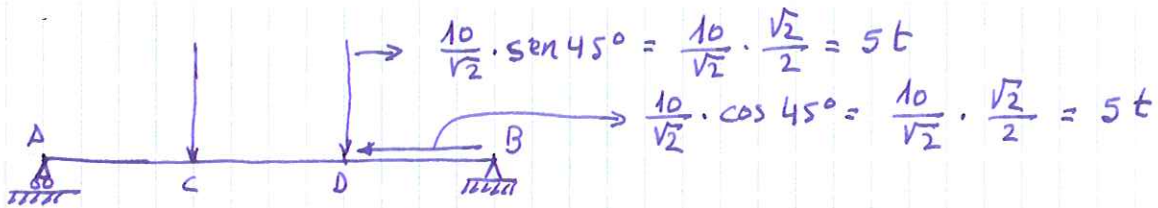
EJERCICIO 34

De la estructura de la figura obtener las reacciones y las leyes de esfuerzos: momentos, axiles y cortantes

Resolución

Siempre que actúen cargas inclinadas se comienza descomponiendo éstas según la dirección de la viga y según la normal a la misma.





$N^\circ \text{ reacciones} = 3 \quad Y_A, Y_B, X_B$
 $N^\circ \text{ ecuaciones} = 3 \quad \begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{estructura} \\ \text{isostática} \end{array} \right\}$

$\sum X = 0 \quad X_B - 5 = 0$
 $\sum Y = 0 \quad Y_A + Y_B - 5 - 5 = 0$
 $\sum M_A = 0 \quad Y_B \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 0$

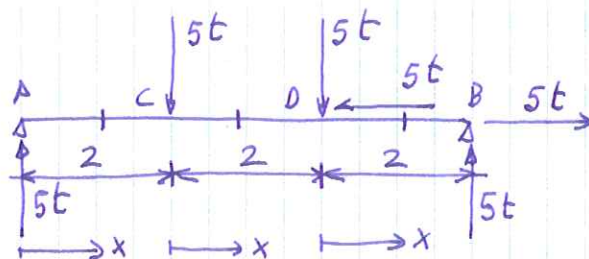
Resolviendo

$X_B = 5t$
 $Y_B = 5t$
 $Y_A = 5t$

Como todos los signos dan positivos, quiere decir que los sentidos elegidos, a priori, eran correctos.

Leyes de esfuerzos

Momentos flectores

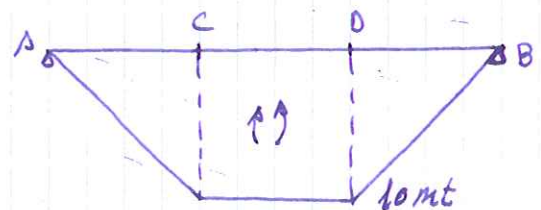


se transfiere entre los puntos de aplicación de las cargas concentradas.

TRAMO DB $M(x) = 5(2-x) \uparrow \uparrow \quad x=0 \quad M_D = 10mt \uparrow \uparrow; x=2 \quad M_B = 0$

TRAMO CD $M(x) = 5(4-x) - 5(2-x) \uparrow \uparrow = 10mt \uparrow \uparrow$ constante en todo el tramo

TRAMO AC $M(x) = 5(6-x) - 5(4-x) - 5(2-x) \uparrow \uparrow$
 $M(x) = 5x \uparrow \uparrow$
 $x=0 \quad M_A = 0$
 $x=2 \quad M_C = 10mt \uparrow \uparrow$

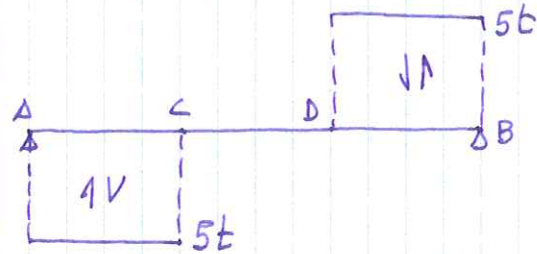


Cortantes:

TRAMO DB $Q(x) = 5t \downarrow \uparrow$

TRAMO CD $Q(x) = 5 - 5 = 0t$

TRAMO AC $Q(x) = 5 - 5 - 5 = -5t \downarrow \uparrow$



Axiles:

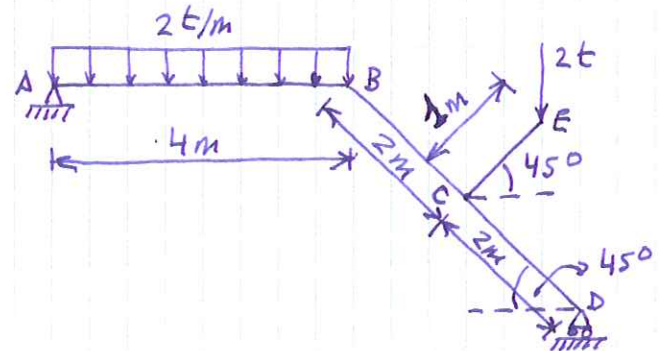
TRAMO DB $N(x) = 5t \leftarrow \rightarrow$ Tracción

TRAMO CD } $N(x) = 5 - 5 = 0t$
TRAMO AC }

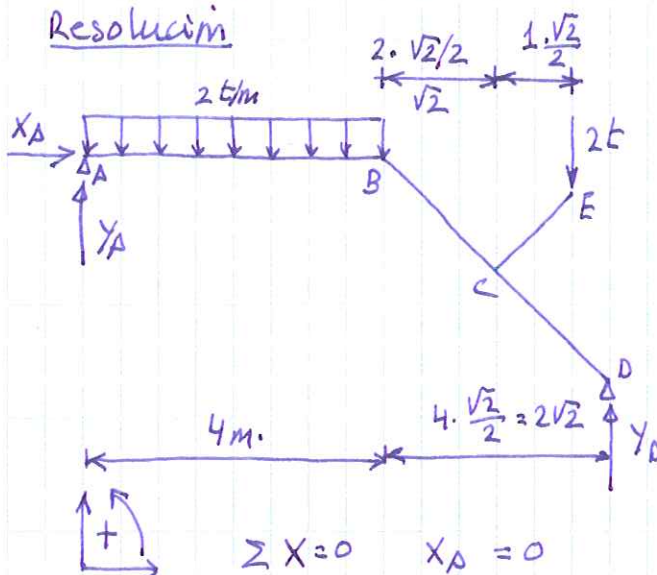


EJERCICIO 35

De la estructura de la figura obtener las reacciones en los apoyos y las leyes de esfuerzos: momentos, cortantes y axiles



Resolución



$N^{\circ} \text{ reacciones} = 3$ X_A, Y_A, Y_D Estructura isostática.
 $N^{\circ} \text{ ecuaciones} = 3$ $\sum X = 0$
 $\sum Y = 0$
 $\sum M = 0$

$\sum X = 0$ $X_A = 0$

$\sum Y = 0$ $Y_A + Y_D - 2 \cdot 4 - 2 = 0$

$\sum M_A = 0$ $Y_D \cdot (4 + 2\sqrt{2}) - 2 \cdot (4 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0$

Resolviendo

$X_A = 0$

$Y_D = 4,1t$

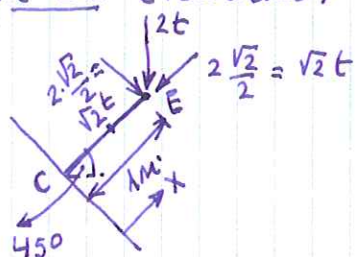
$Y_A = 5,9t$

Leyes de esfuerzos

Momento flectores:

Descomponemos la estructura en partes más sencillas

Viga CE (voladizo)



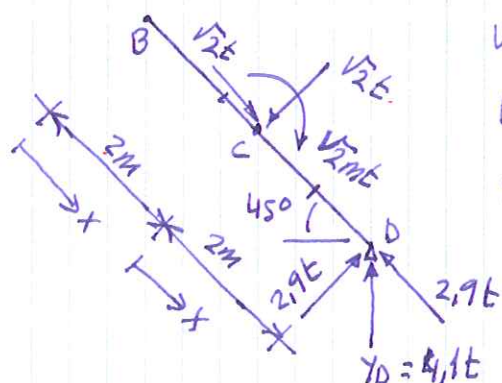
Se descompone la fuerza de $2t$ que actúa en el extremo E según la dirección de la viga y su perpendicular.

$$M(x) = \sqrt{2}(1-x) \downarrow \downarrow \quad x=1 \quad M_E = 0$$

$$x=0 \quad M_C = \sqrt{2}mt \downarrow \downarrow$$



Viga BCD



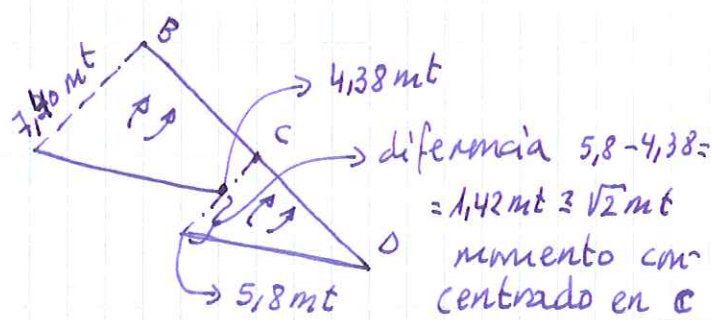
Se traslada la carga del extremo del voladizo E al punto C y se proyecta según la dirección de la viga y su perpendicular. También la reacción Y_D se proyecta según la dirección de la viga y su perpendicular.

TRAMO CD $M(x) = 2,9(2-x) \uparrow \uparrow \quad x=0 \quad M_C = 5,8mt \quad x=2 \quad M_D = 0$

TRAMO BC $M(x) = 2,9(4-x) - \sqrt{2} - \sqrt{2}(2-x) \uparrow \uparrow$

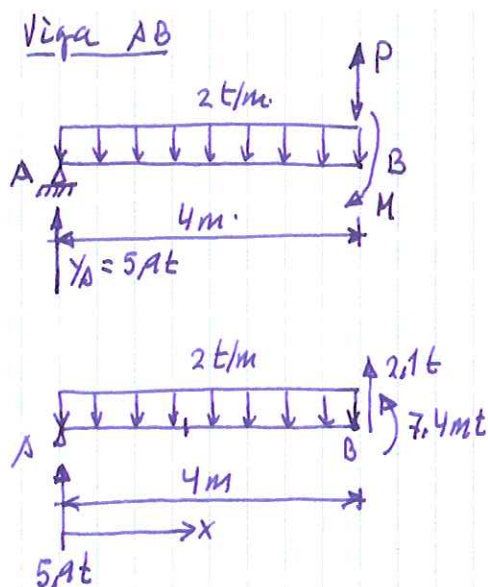
$$x=0 \quad M_B = 7,40mt \uparrow \uparrow$$

$$x=2 \quad M_C = 4,38mt \uparrow \uparrow$$



Ambas ecuaciones $M(x)$

son rectas.



Trasladamos a B las fuerzas que actúan sobre la estructura a la derecha de B (fuerzas frontales)

$$P = 4,1 - 2 = 2,1t \uparrow$$

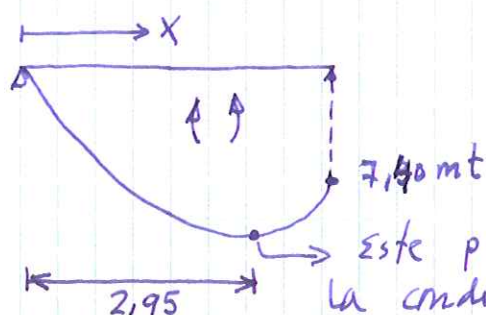
↳ y_0 ↳ carga en el voladizo

$$M = 4,1 \times 2\sqrt{2} - 2 \cdot \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 7,4mt \cdot \uparrow$$

$$M(x) = 7,4 + 2,1 \cdot (4-x) - \underbrace{2(4-x) \frac{(4-x)}{2}}_{\text{momento carga uniforme } 2t/m} = \underbrace{7,4 + (4-x)[2,1 - (4-x)]}_{\text{ecuación de una parábola}} \uparrow$$

$$x = 4m \quad M_B = 7,4mt \uparrow$$

$$x = 0 \quad M_A \approx 0 \quad (\text{el error que se produce es por haber realizado los cálculos con un decimal}).$$



Este punto se calcula imponiendo la condición de máximo

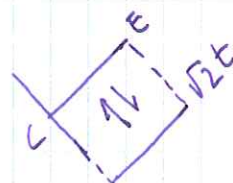
$$\frac{dM(x)}{dx} = 0 \quad x = 2,95m.$$

$$M(x=2,95) = 8,50mt$$

Constantes

Viga CE

De la figura anterior $Q(x) = \sqrt{2}t \uparrow$

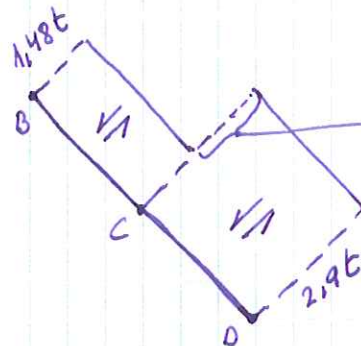


Viga BCD

De la figura anterior tenemos:

TRAMO CO $Q(x) = 2,9 \text{ t} \uparrow$

TRAMO BC $Q(x) = 2,9 \text{ t} - \sqrt{2}t = 1,48 \text{ t} \uparrow$



diferencia $2,9 - 1,48 = 1,42 \text{ t} \approx 2\sqrt{2}t$ carga concentrada en C

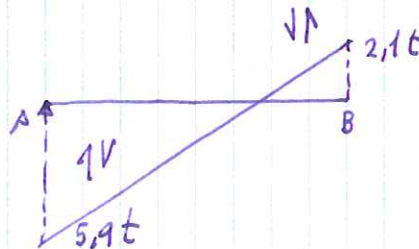
Viga AB

De la figura anterior tenemos

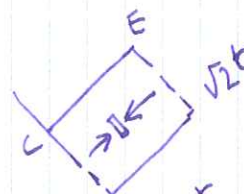
$$Q(x) = 2,1 - 2(4-x) \uparrow$$

$$x=0 \quad Q_A = -5,9 \text{ t} \uparrow$$

$$x=4 \quad Q_B = 2,1 \text{ t} \uparrow$$

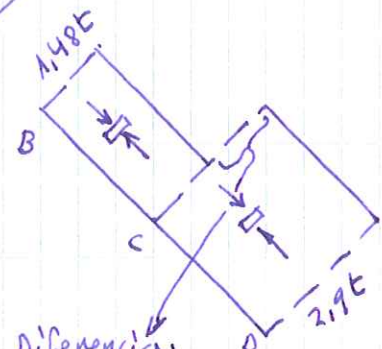
AxilesViga CE

$$N(x) = \sqrt{2}t \rightarrow \leftarrow \text{compresión}$$

Viga BCD

TRAMO CD $N(x) = 2,9 \text{ t} \rightarrow \leftarrow$

TRAMO BC $N(x) = 2,9 \text{ t} - \sqrt{2}t = 1,48 \text{ t} \rightarrow \leftarrow$



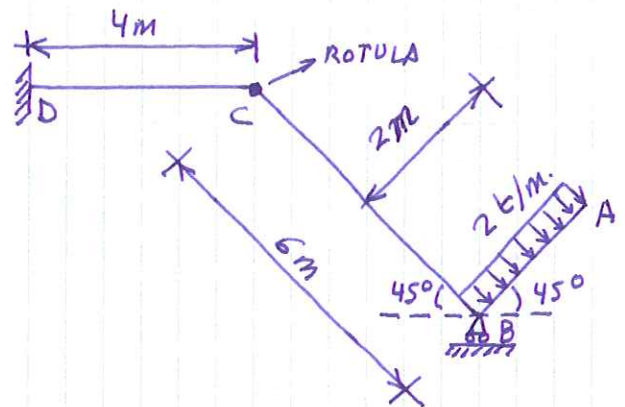
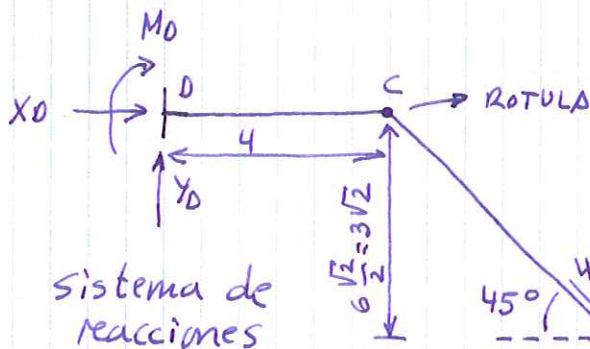
Diferencia: $2,9 - 1,48 = 1,42 \text{ t} \approx \sqrt{2}t$ carga concentrada en C

Viga AB

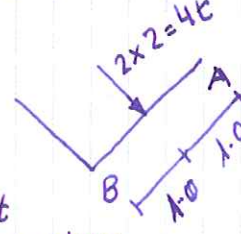
no está sometida a axiles.

EJERCICIO 36

De la estructura de la figura,
Hallar las reacciones en los
apoyos y las leyes de esfuer-
zos: momentos, cortantes y
axiles

Resolución

Reducimos a B las car-
gas que actúan en la
ménsula BA



Nº reacciones = 4, X_0, Y_0, M_0, Y_B

Nº ecuaciones = 4, 3 estática

1 rótula C $\sum M_{FRONTALES} = 0$

Estructura
isostática.



$$\sum X = 0 \quad X_0 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad Y_0 + Y_B - 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum M_D = 0 \quad Y_B (4 + 3\sqrt{2}) - 4 - 4 \frac{\sqrt{2}}{2} (4 + 3\sqrt{2}) + 4 \frac{\sqrt{2}}{2} 3\sqrt{2} = 0$$

Rótula en C: momento nulo en C de la fuerzas
a la derecha (frontales) de C

$$\sum M_C = 0 \quad Y_B \cdot 3\sqrt{2} - 4 = 0$$

la fuerza en B de 4t no produce
momento en C pues pasa por C

4 ecuaciones
con 4 incógni-
tas.

Resolviendo:

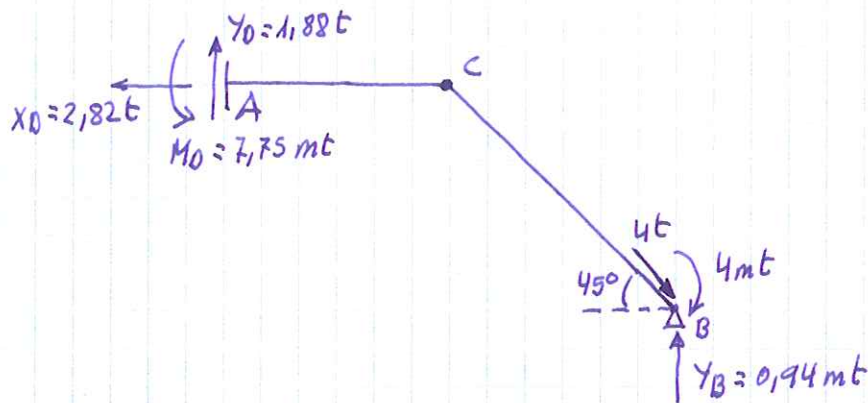
$$X_0 = -2,82 \text{ t}$$

$$Y_B = 0,94 \text{ t}$$

$$Y_0 = 1,88 \text{ t}$$

$$M_0 = -7,75 \text{ mt}$$

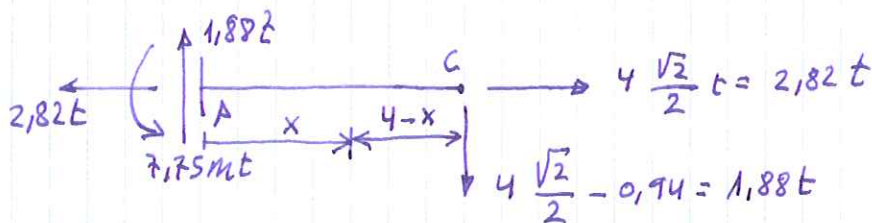
Como $X_0 = -2,82t$ y $M_0 = -7,75mt$ tienen el signo negativo, los sentidos son contrarios a los considerados a priori



Leyes de esfuerzos

Viga AC

Reducimos a C las cargas (fuerzas) de la derecha (frontales) de C

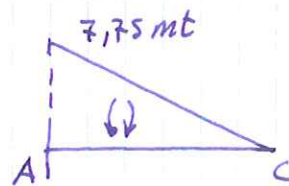


Momentos

$$M(x) = -1,88 \cdot (4-x) \quad \downarrow \downarrow$$

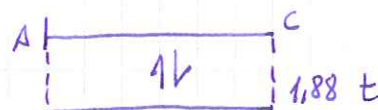
$$x = 4m \quad M_C = 0$$

$$x = 0 \quad M_A = -7,55mt \quad \downarrow \downarrow$$



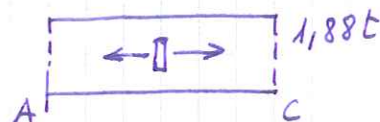
Constantes

$$Q(x) = -1,88t \quad \downarrow$$



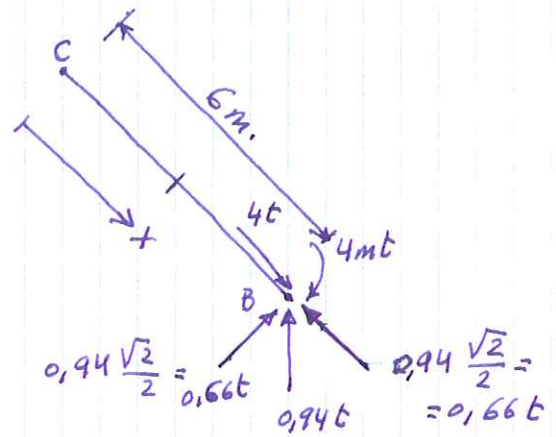
Axiles

$$N(x) = 1,88t \quad \leftarrow \rightarrow \text{Tracción}$$



Viga CB

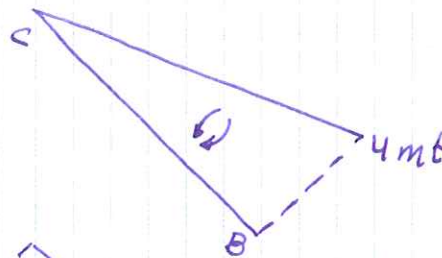
En el extremo B las fuerzas se proyectan según la dirección de la viga y su perpendicular.

Momentos

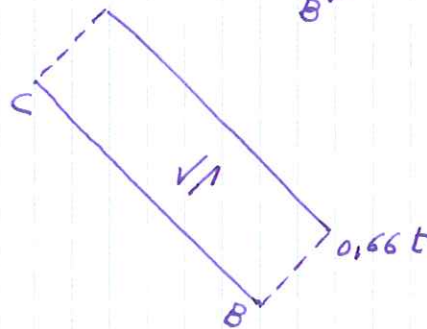
$$M(x) = 0.66(6-x) - 4 \uparrow \uparrow$$

$$x=0 \quad M_C = 0$$

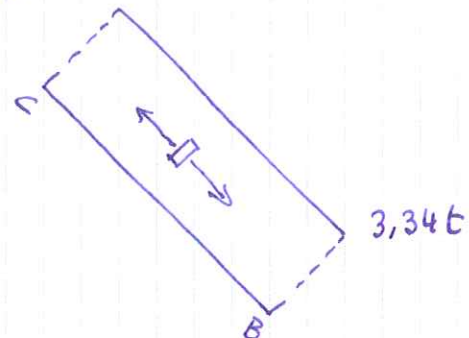
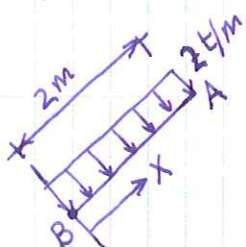
$$x=6 \quad M_B = -4mt \downarrow \downarrow$$

Cortantes

$$Q(x) = 0.66t \uparrow \uparrow$$

Axiles

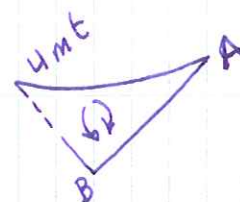
$$N(x) = 4 - 0.66 = 3.34t \leftarrow \rightarrow$$

Viga BA (ménsula)Momentos

$$M(x) = 2(2-x)\frac{(2-x)}{2} \downarrow \downarrow$$

$$x=0 \quad M_B = -4mt \downarrow \downarrow$$

$$x=2 \quad M_A = 0$$



Constantes

$$Q(x) = -2(2-x)t \quad 1\downarrow$$

$$x=0 \quad Q_B = -4t \quad 1\downarrow$$

$$x=4 \quad Q_A = 0$$

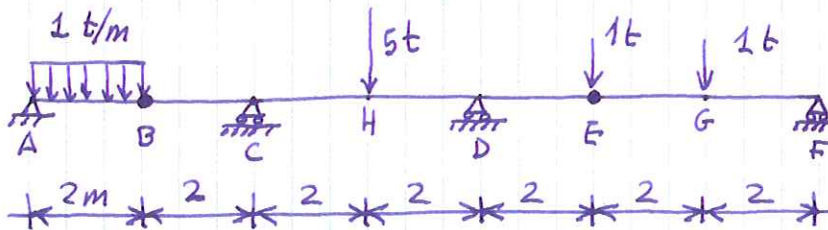


Axiles

La viga no está sometida a axiles.

EJERCICIO 37

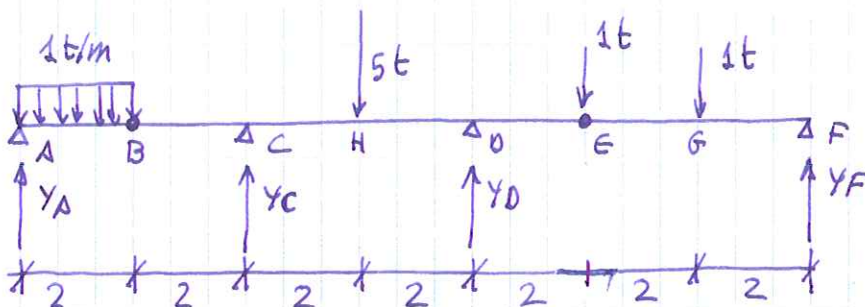
Resolver la siguiente estructura



Secciones B y E son rotulas.

Hallar las reacciones en los apoyos y las leyes de momentos y cortantes

Resolución



Como no hay cargas horizontales no aparecen reacciones horizontales en el apoyo A

Nº reacciones = 4 Y_A, Y_C, Y_D, Y_F

Nº ecuaciones $\Rightarrow$ Estática 2, $\sum Y = 0, \sum M = 0$

Rotulas 2, $\sum M_B = 0, \sum M_E = 0$

$$4 - 2 - 2 = 0$$

la estructura es isostática.

Ecuaciones estática signos $\uparrow +$

$$\sum Y = 0 \quad Y_A + Y_C + Y_D + Y_F - \underbrace{1 \times 2}_{\text{carga distribuida}} - 5 - 1 - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \quad Y_C \cdot 4 + Y_D \cdot 8 + Y_F \cdot 14 - \underbrace{1 \times 2 \times 1}_{\text{carga distribuida}} - 5 \times 6 - 1 \times 10 - 1 \times 12 = 0 \quad (2)$$

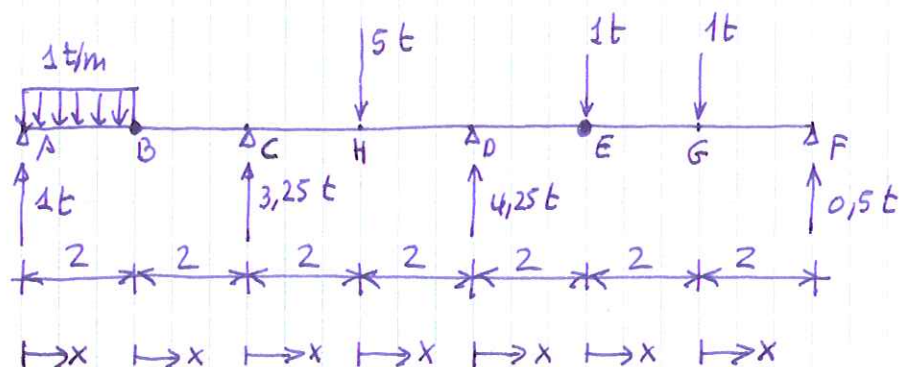
Ecuaciones rótulas: Las rótulas B y E dividen la la rija en dos partes cada una, izquierda (dorsal) y derecha (frontal). En cada rótula se cumple que es nulo el momento de las cargas dorsales (izquierda) o de las cargas frontales (derecha). En la rótula B elegimos las cargas dorsales (izquierda) y en la rótula E las cargas frontales (derecha). Se toman los mismos signos que en las ecuaciones de la estática.

$$\text{Rótula B} \quad \sum M_B = 0 \quad -Y_A \cdot 2 + 1 \times 2 \times 1 = 0 \quad (3)$$

$$\text{Rótula E} \quad \sum M_E = 0 \quad Y_F \cdot 4 - 1 \times 2 = 0 \quad (4)$$

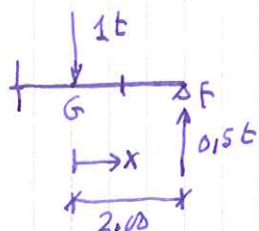
Resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones (1), (2), (3) y (4) en cuatro incógnitas Y_A, Y_C, Y_D, Y_F , se obtienen las reacciones $Y_A = 1t, Y_C = 3,25t, Y_D = 4,25t, Y_F = 0,5t$

Leyes de esfuerzos



se transifica entre puntos de aplicación de cargas (incluidos los apoyos donde se aplican las reacciones) y las rotulas. Criterios de signos momentos $\uparrow \uparrow + \downarrow \downarrow -$
 Cortantes $\downarrow \uparrow + \uparrow \downarrow -$

Tramo GF



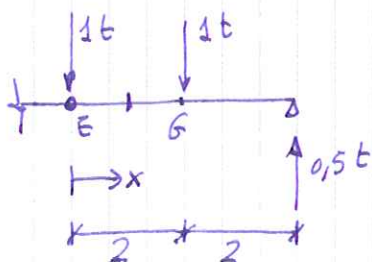
Momentos $M(x) = 0,5(2-x) \uparrow \uparrow$

$x=2 \quad M_F = 0$

$x=0 \quad M_G = 0,5 \times 2 = 1 \text{ mt} \uparrow \uparrow$

Cortantes $Q(x) = 0,5 \text{ t} \downarrow \downarrow$

Tramo EG



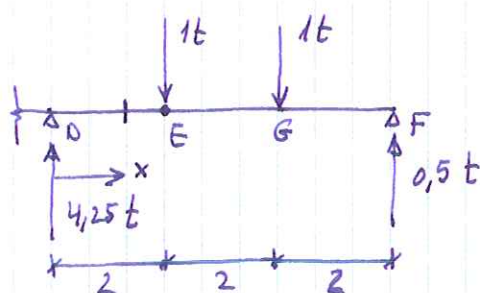
Momentos $M(x) = 0,5(4-x) - 1 \times (2-x) \uparrow \uparrow$

$x=2 \quad M_G = 0,5 \times 2 - 1 \times 0 = 1 \text{ mt} \uparrow \uparrow$

$x=0 \quad M_E = 0,5 \times 4 - 1 \times 2 = 0$

Cortantes $Q(x) = 0,5 - 1 = -0,5 \text{ t} \uparrow \uparrow$

Tramo DE



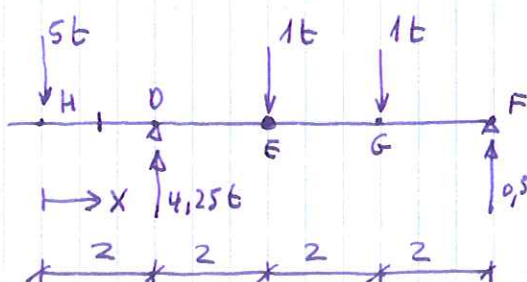
Momentos $M(x) = 0,5(6-x) - 1(4-x) - 1(2-x) \uparrow \uparrow$

$x=2 \quad M_E = 0,5(4) - 1(2) - 1(0) = 0$

$x=0 \quad M_D = 0,5(6) - 1(4) - 1(2) = -3 \text{ mt} \downarrow \downarrow$

Cortantes $Q(x) = 0,5 - 1 - 1 = -1,5 \text{ t} \uparrow \uparrow$

Tramo HO

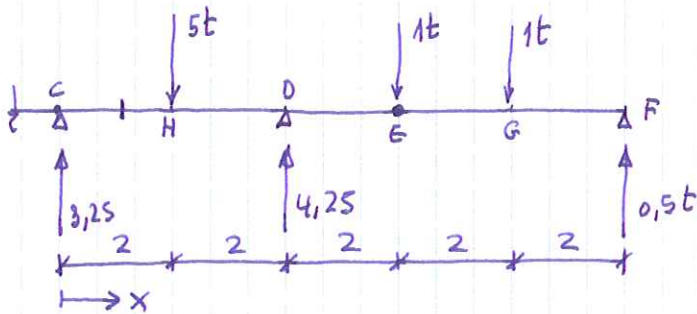


Momentos $M(x) = 4,25(2-x) + 0,5(8-x) - 1(6-x) - 1(4-x) \uparrow \uparrow$

$x=2 \quad M_D = 4,25(0) + 0,5(6) - 1(4) - 1(2) = -3 \text{ mt} \downarrow \downarrow$

$x=0 \quad M_H = 4,25(2) + 0,5(8) - 1(6) - 1(4) = 2,5 \text{ mt} \uparrow \uparrow$

Cortante $Q(x) = 4,25 + 0,5 - 1 - 1 = 2,75 \text{ t} \downarrow \downarrow$

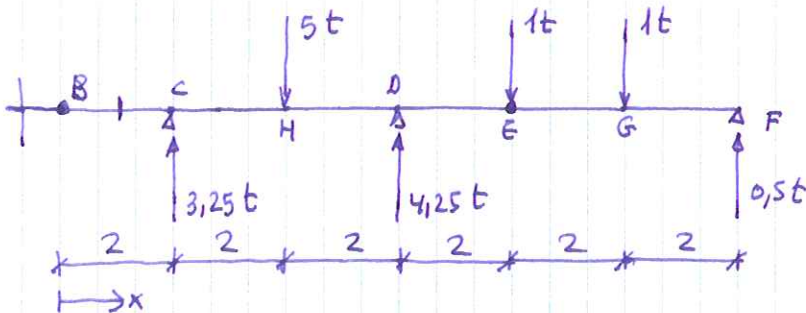
Tramo CH

Momentos $M(x) = 4,25(4-x) + 0,5(10-x) - 5(2-x) - 1(8-x) - 1(6-x) \uparrow \uparrow$

$x=2 \quad M_H = 4,25(2) + 0,5(8) - 5(0) - 1(6) - 1(4) = 2,5 \text{ mt} \uparrow \uparrow$

$x=0 \quad M_C = 4,25(4) + 0,5(10) - 5(2) - 1(8) - 1(6) = -2 \text{ mt} \downarrow \downarrow$

Constantes $Q(x) = 4,25 + 0,5 - 5 - 1 - 1 = -2,25 \text{ t} \downarrow \downarrow$

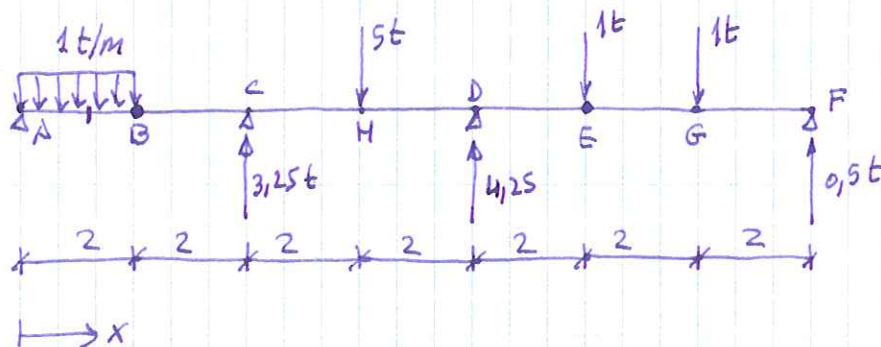
Tramo BC

Momentos $M(x) = 3,25(2-x) + 4,25(6-x) + 0,5(12-x) - 5(4-x) - 1(8-x) - 1(10-x) \uparrow \uparrow$

$x=2 \quad M_C = 3,25(0) + 4,25(4) + 0,5(10) - 5(2) - 1(6) - 1(8) = -2 \text{ mt} \downarrow \downarrow$

$x=0 \quad M_B = 3,25(2) + 4,25(6) + 0,5(12) - 5(4) - 1(8) - 1(10) = 0$

Constantes $Q(x) = 3,25 + 4,25 + 0,5 - 5 - 1 - 1 = 1,0 \text{ t} \uparrow \uparrow$

Tramo AB

Momentos $M(x) = 3,25(4-x) + 4,25(8-x) + 0,5(14-x) - 5(6-x) - 1(10-x) - 1(12-x) -$
 $- 1(2-x) \frac{(2-x)}{2} \uparrow \uparrow$
 $\hookrightarrow$ carga distribuida

$$x=2 \quad M_B = 3,25(2) + 4,25(6) + 0,5(12) - 5(4) - 1(8) - 1(10) - 0 = 0$$

$$x=0 \quad M_A = 3,25(4) + 4,25(8) + 0,5(14) - 5(6) - 1(10) - 1(12) - 1 \cdot 2 \frac{2}{2} = 0$$

Como hay una carga distribuida $M(x)$ es una ecuación parabólica, para calcular el máximo derivamos

$$\frac{dM(x)}{dx} = -3,25 - 4,25 - 0,5 + 5 + 1 + 1 - 2 \frac{(2-x)}{2} (1) = 0$$

$$-8 + 7 + (2-x) = 0 \quad x=1$$

$$x=1 \quad M(x=1) = 3,25(3) + 4,25(7) + 0,5(13) - 5(5) - 1(9) - 1(13) - 1(1) \frac{1}{2} =$$

$$= 0,5 \uparrow \uparrow \text{ mt}$$

Constantes $Q(x) = 3,25 + 4,25 + 0,5 - 5 - 1 - 1 - 1(2-x) \uparrow \uparrow$ (Ecuac. recta)
 $\hookrightarrow$ carga distribuida

$$x=2 \quad Q_B = 1 \text{ t } \downarrow \uparrow$$

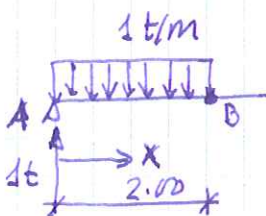
$$x=0 \quad Q_A = 3,25 + 4,25 + 0,5 - 5 - 1 - 1 - 2 = -1 \text{ t } \uparrow \downarrow$$

$$x=1 \quad Q(x=1) = 3,25 + 4,25 + 0,5 - 5 - 1 - 1 - 1 = 0 \quad (\text{En } x=1 \text{ la}$$

tangente de la ley de momentos $M(x)$ es horizontal $\frac{dM(x)}{dx} = 0$

y como vimos $Q = \frac{dM}{dx} = 0$)

En cualquiera de los tramos en vez de haber tomado las cargas frontales (derecha) se pueden tomar las cargas dorsales (izquierda). Por ejemplo en el tramo AB quedaría como sigue:



$$M(x) = 1 \cdot x - 1 \times \frac{x}{2} \uparrow \uparrow \quad x=2 \quad M_B = 2 - 2 \frac{2}{2} = 0$$

$$x=0 \quad M_A = 0$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = 1 - x = 0 \quad x=1 \quad M(x=1) = 1 - \frac{1}{2} = 0,5 \uparrow \uparrow$$

$$Q(x) = -1 + 1 \cdot x \quad \downarrow \uparrow \quad (\text{Ecuación de una recta})$$

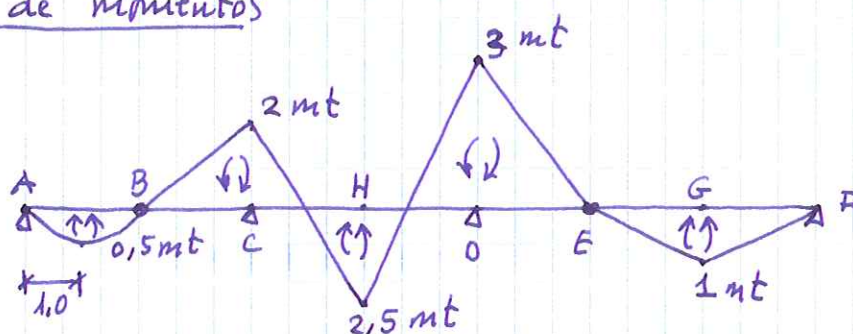
$$x = 0 \quad Q_A = -1 \text{ t } \downarrow \uparrow$$

$$x = 2 \quad Q = 1 \text{ t } \downarrow \uparrow$$

$$x = 3 \quad Q = 0$$

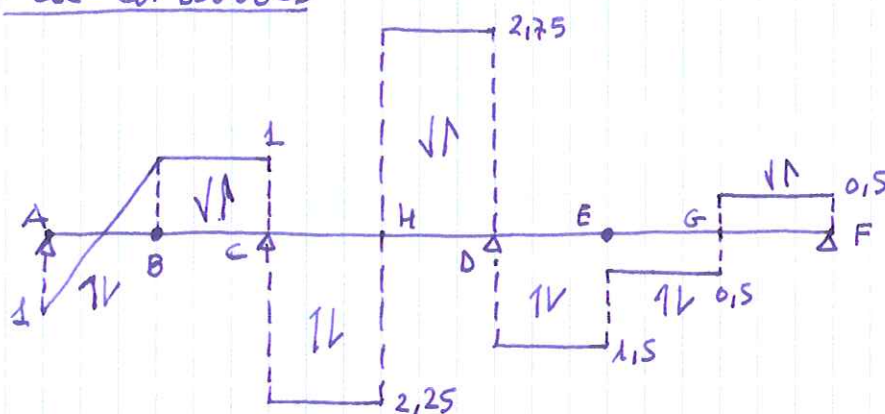
A continuación dibujamos las leyes de esfuerzos.

Ley de momentos



La ley entre cargas puntuales (incluidas reacciones) es lineal. En el tramo de carga distribuida AB es parabólica.

Ley de cortantes

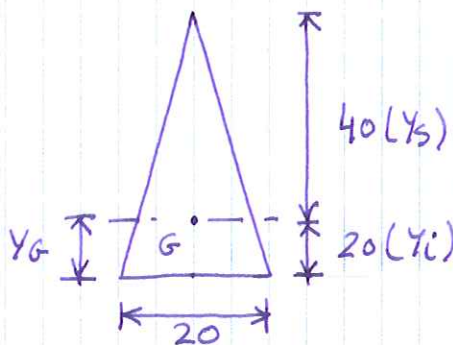


Como se puede apreciar en los puntos A, C, H, D, E, G y F donde hay aplicadas cargas puntuales o concentradas el salto de la ley de cortantes coincide con la carga concentrada.

EJERCICIO 38

si la sección transversal de la viga del ejercicio 37 es la de la figura, calcular las tensiones normales y tangenciales

Resolución



Calculamos el centro de gravedad y el momento de inercia

$$Y_G = \frac{1}{3} H = \frac{1}{3} 60 = 20 \text{ cm}$$

$$I = \frac{1}{36} B H^3 = \frac{1}{36} 20 (60)^3 = 120.000 \text{ cm}^4$$

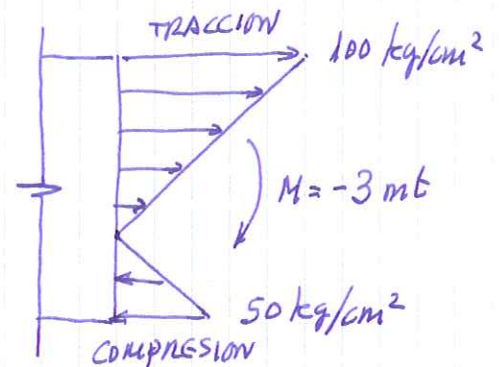
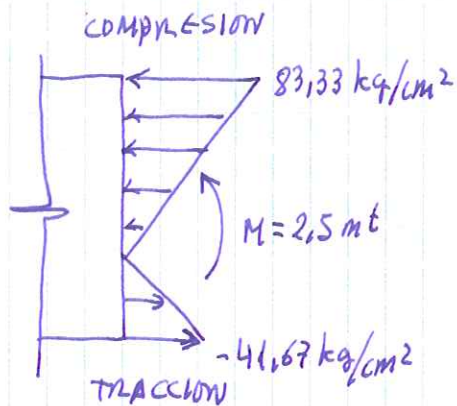
Las tensiones normales se calculan en los momentos flectores máximos. Como la sección no es simétrica respecto al eje horizontal que pasa por su centro de gravedad G, hay que considerar los momentos máximos positivos y negativos.

Momento máximo positivo $M = 2,5 \text{ mt} \uparrow = 2,5 \times 10^2 \times 10^3 = 2,5 \times 10^5 \text{ cm kg} \uparrow$

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} \begin{cases} \text{Fibra superior} & \sigma = \frac{2,5 \times 10^5 \times 40}{120.000} = 83,33 \text{ kg/cm}^2 \text{ compresión} \\ \text{Fibra inferior} & \sigma = \frac{2,5 \times 10^5 \times (-20)}{120.000} = -41,67 \text{ kg/cm}^2 \text{ Tracción} \end{cases}$$

Momento máximo negativo $M = -3 \text{ mt} \downarrow = -3 \times 10^2 \times 10^3 = -3 \times 10^5 \text{ cm kg} \downarrow$

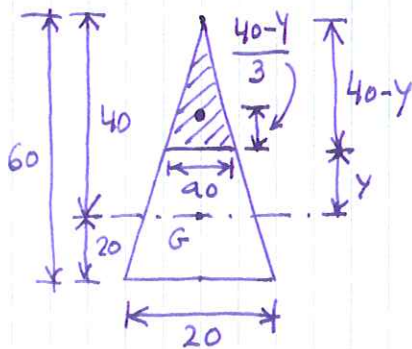
$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} \begin{cases} \text{Fibra superior} & \sigma = \frac{-3 \times 10^5 \times 40}{120.000} = -100 \text{ kg/cm}^2 \text{ Tracción} \\ \text{Fibra inferior} & \sigma = \frac{-3 \times 10^5 \times (-20)}{120.000} = 50 \text{ kg/cm}^2 \text{ compresión} \end{cases}$$



Tracción máxima $\sigma = -100 \text{ kg/cm}^2$

Compresión máxima $\sigma = 83,33 \text{ kg/cm}^2$

Las tensiones tangenciales serán máximas donde mayor sea el cortante Q en valor absoluto $Q = 2,75 \text{ t}$ en D



Tensiones tangenciales en la sección de ancho a_0 $\tau = \frac{Q M_0}{I \cdot a_0}$

M_0 = momento estático del área por encima de a_0 (área rayada) respecto de G

Por semejanza de triángulos

$$\frac{a_0}{40-y} = \frac{20}{60} \quad a_0 = \frac{1}{3} (40-y)$$

El centro de gravedad del área rayada está situado a $\frac{40-y}{3}$ (triángulo) por encima del ancho a_0

$M_0 = \text{Área} \times (\text{distancia entre centros de gravedad})$

$$M_0 = \underbrace{\frac{1}{2} a_0 (40-y)}_{\text{Área}} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{3} (40-y) + y \right]}_{\text{distancia del c.d.g. del área rayada a G.}}$$

$$M_{00} = \frac{1}{2} \overbrace{\frac{1}{3} (40-y) (40-y)}^{a_0} \cdot \left(\frac{40+2y}{3} \right) = \frac{1}{18} (40-y)^2 (40+2y)$$

$$Z = \frac{Q M_{00}}{I a_0} = \frac{Q \frac{1}{18} (40-y)^2 (40+2y)}{I \frac{1}{3} (40-y)} = \frac{Q}{6I} (40-y) (40+2y)$$

Z será máxima en una sección y que se obtiene de $\frac{dZ}{dy} = 0$ ($F(y) = G(y) \cdot H(y) \Rightarrow \frac{dF}{dy} = \frac{dG}{dy} \cdot H + G \cdot \frac{dH}{dy}$)

$$\frac{dZ}{dy} = -\frac{Q}{6I} (40+2y) + \frac{2Q}{6I} (40-y) = 0 \text{ resolviendo } \underline{y = 20 \text{ cm}}$$

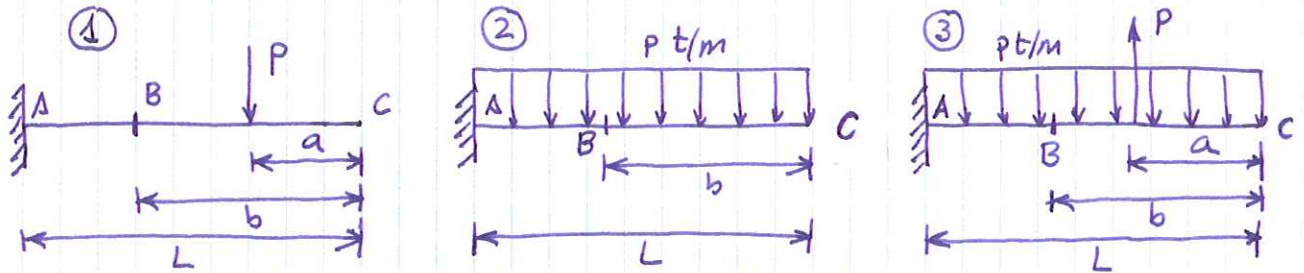
por tanto $Z_{\max} = \frac{2,75 \times 10^3}{6 \times 120.000} \cdot (40-20) (40+2 \times 20) = \underline{6,11 \text{ kg/cm}^2}$

CALCULO DE GIROS Y FLECHAS EN ESTRUCTURAS ISOSTATICAS

59

EJERCICIO 39

Obtener mediante el primer teorema de Mohr los giros en las secciones B y C de las siguientes estructuras

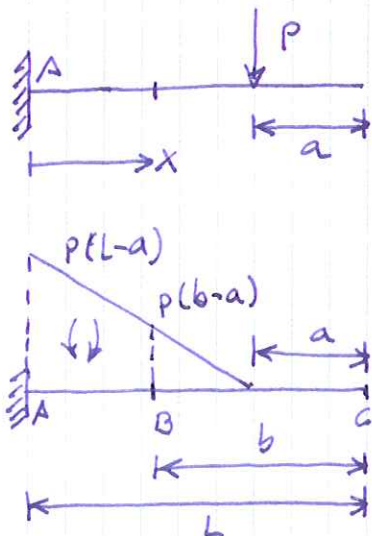


$EI = \text{Constante}$ en todas las estructuras

Resolución

Estructura ①

Calculamos la ley de momentos flectores



$$M(x) = P(L-a-x) \downarrow \downarrow$$

$$x=0 \quad M_A = P(L-a) \downarrow \downarrow$$

$$x=L-b \quad M_B = P(b-a) \downarrow \downarrow$$

$$x=L-a \quad M=0$$

Por el primer teorema de Mohr, tenemos que el giro vale:

$$\theta = \frac{1}{EI} \int M(x) dx$$

Area de la ley de momentos entre la sección A y la sección donde se pide el giro.

$$\text{En B: } \theta_B = \frac{1}{EI} \int_A^B M(x) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{P(L-a) + P(b-a)}{2} \cdot (L-b) \right]$$

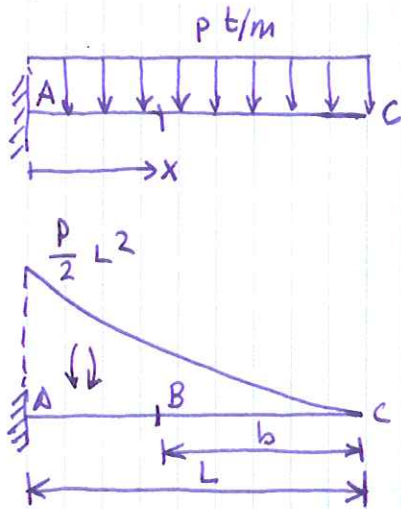
Area trapecio

$$\text{En C: } \theta_C = \frac{1}{EI} \int_A^C M(x) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (L-a) P(L-a) \right] = \frac{1}{2EI} P(L-a)^2$$

Area triangulo

Estructura ②

Calculamos la ley de momentos flectores



$$M(x) = p(L-x) \frac{(L-x)}{2} = \frac{P}{2} (L-x)^2 \quad \downarrow \downarrow$$

$$x=0 \quad M_A = \frac{P}{2} L^2 \quad \downarrow \downarrow$$

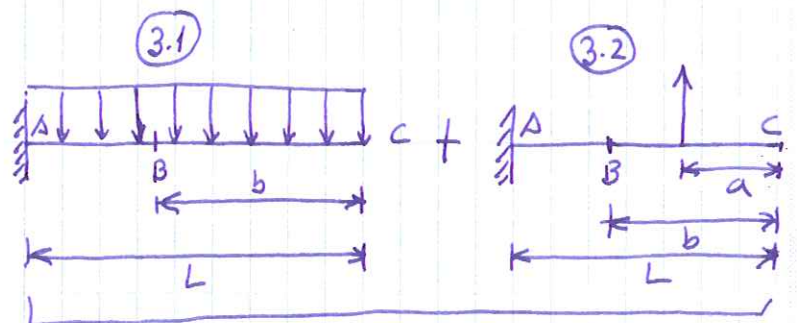
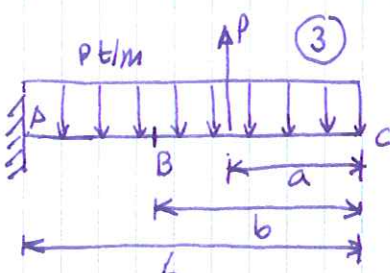
$$x=L \quad M_C = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{\Theta}_B &= \frac{1}{EI} \int_A^B M(x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^{L-b} \frac{P}{2} (L-x)^2 dx = \frac{1}{EI} \frac{P}{2} \left[-\frac{(L-x)^3}{3} \right]_{x=0}^{x=L-b} \\ &= \frac{1}{EI} \frac{P}{2} \left[-\frac{b^3}{3} - \frac{-L^3}{3} \right] = \frac{P}{6EI} [L^3 - b^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\Theta}_C &= \frac{1}{EI} \int_A^C M(x) dx = \frac{1}{EI} \int_{x=0}^{x=L} \frac{P}{2} (L-x)^2 dx = \frac{1}{EI} \frac{P}{2} \left[-\frac{(L-x)^3}{3} \right]_{x=0}^{x=L} \\ &= \frac{1}{EI} \frac{P}{2} \left[\frac{L^3}{3} \right] = \frac{PL^3}{6EI} \end{aligned}$$

También se hubiese obtenido de la expresión de Θ_B haciendo $b=0$

Estructura ③



PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Por el principio de superposición la estructura (3) se puede descomponer como suma de las estructuras (3.1) y (3.2) y por tanto:

$$\vec{\theta}_B^3 = \vec{\theta}_B^{3.1} + \vec{\theta}_B^{3.2} \quad \text{y} \quad \vec{\theta}_C^3 = \vec{\theta}_C^{3.1} + \vec{\theta}_C^{3.2}$$

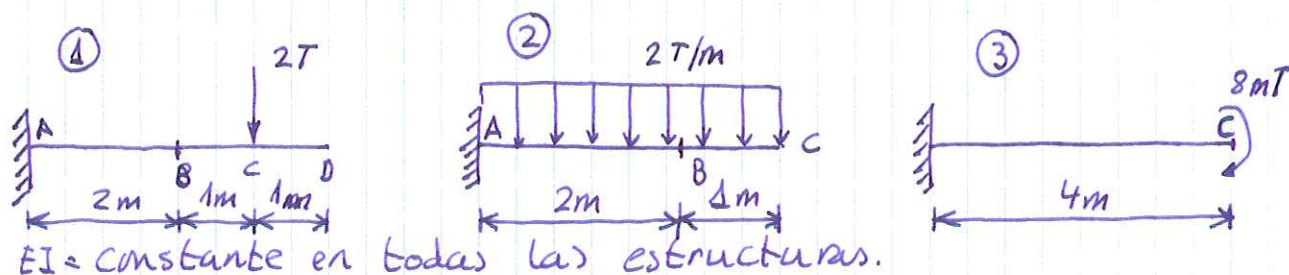
Por otra parte la estructura (3.1) es como la estructura (2) anterior y la estructura (3.2) como la estructura (1) anterior pero en la fuerza P de signo contrario. luego tenemos:

$$\vec{\theta}_B^{3.1} = \vec{\theta}_B^2 \quad \text{y} \quad \vec{\theta}_C^{3.1} = \vec{\theta}_C^2$$

$$\vec{\theta}_B^{3.2} = -\vec{\theta}_B^1 \quad \text{y} \quad \vec{\theta}_C^{3.2} = -\vec{\theta}_C^1$$

EJERCICIO 40

obtener mediante el segundo teorema de Mohr la flecha en las secciones B, C y D. de las siguientes estructuras



Resolución

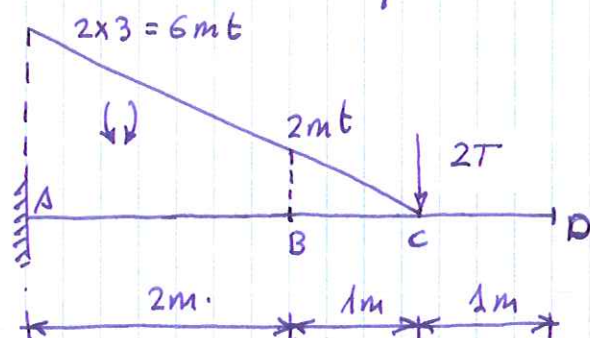
Estructura (1)

Por el segundo Teorema de Mohr, tenemos que la flecha vale

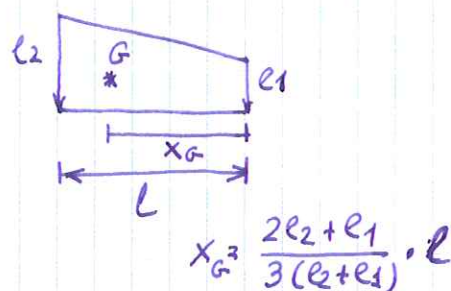
$$\delta = \frac{1}{EI} \int \frac{M(x) \times dx}{\text{Momento estático del área de momentos entre la sección A y la sección que se pide la flecha}}$$

respecto de un eje vertical que pasa por la sección donde se pide la flecha.

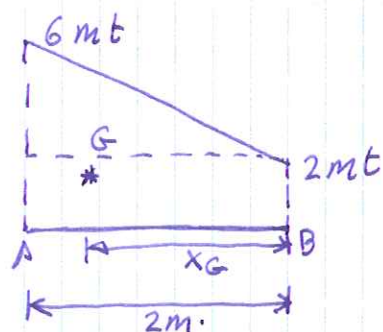
Calculamos la ley de momentos flectores



centro de gravedad de un trapecio.



Flecha en B: la ley de flectores entre A y B es el siguiente trapecio.



$$x_G = \frac{2 \cdot 6 + 2}{3(6+2)} \cdot 2 = \frac{14}{12} = 1,17 \text{ m.}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} (6+2) \times 2 = 8 \text{ m} \cdot \text{m.}$$

$$\delta_B = \frac{1}{EI} \int_A^B M(x) \cdot x \, dx = \frac{1}{EI} \text{Area} \cdot x_G = \frac{1}{EI} 8 \cdot \frac{14}{12} = \frac{1}{EI} 9,33 \text{ m}$$

También se puede descomponer el trapecio en un rectángulo y un triángulo

$$\downarrow \delta_B = \frac{1}{EI} \left[2 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} 2 \right] = \frac{1}{EI} \frac{28}{3} = \frac{1}{EI} 9,33 \text{ m.}$$

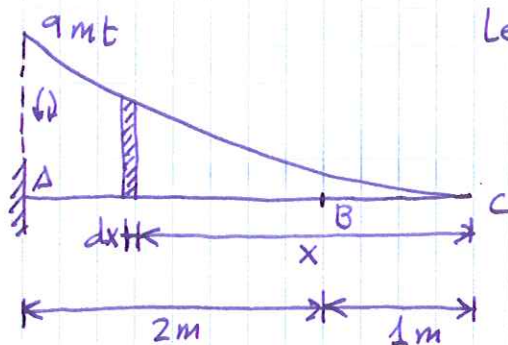
Flecha en C: la ley de flectores entre A y C es el triángulo completo

$$\downarrow \delta_B = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} 3 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 3 \right] = \frac{1}{EI} 18,0 \text{ m.}$$

Flecha en D La ley de flectores entre A y D es el triángulo completo, pero el momento estático se toma respecto al eje vertical que pasa por D.

$$\downarrow \delta_D = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} 3 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} 3 + 1 \right) \right] = \frac{1}{EI} 27,0 \text{ m.}$$

Estructura (2)



Ley de flectores

$$M(x) = 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 2 \frac{x^2}{2} = x^2$$

$$x=0 \quad M_C=0$$

$$x=3 \quad M_C=9 \text{ mt}$$

Flecha en C

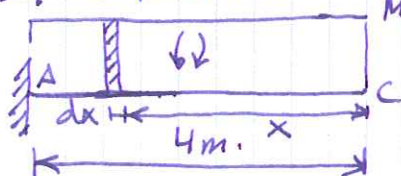
$$\begin{aligned} \downarrow \delta_C &= \frac{1}{EI} \int_A^C M(x) \cdot x \cdot dx = \frac{1}{EI} \int_{x=0}^{x=3} x^2 \cdot x \cdot dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^3 = \\ &= \frac{1}{EI} \frac{3^4}{4} = \frac{1}{EI} 20,25 \text{ m} \end{aligned}$$

Flecha en B

$$\begin{aligned} \downarrow \delta_B &= \frac{1}{EI} \int_B^A M(x) (x-1) dx = \frac{1}{EI} \int_{x=1}^{x=3} x^2 (x-1) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{EI} 11,33 \text{ m.} \end{aligned}$$

Estructura (3)

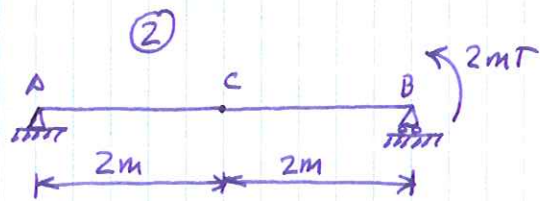
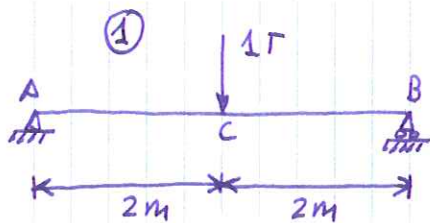
Ley de flectores



$$\begin{aligned} M=8 \text{ mt} \quad \downarrow \delta_C &= \frac{1}{EI} \int_C^A M(x) \cdot x \cdot dx = \frac{1}{EI} \int_{x=0}^{x=4} 8 \cdot x \cdot dx = \\ &= \frac{1}{EI} \left[4x^2 \right]_0^4 = \frac{1}{EI} 64 \text{ m.} \end{aligned}$$

EJERCICIO 41

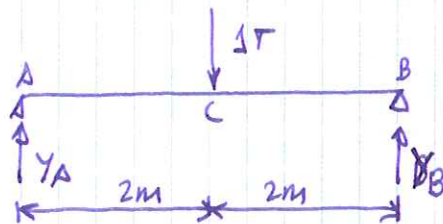
obtener mediante el método de la viga conjugada los giros en los extremos A y B y la flecha en el punto medio C de las estructuras:



Para ambas estructuras $EI = 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$
 $EI = 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 = 10^{10} \times 10^{-3} \times (10^{-2})^2 = 10^3 \text{ T} \cdot \text{m}^2$

Resolución

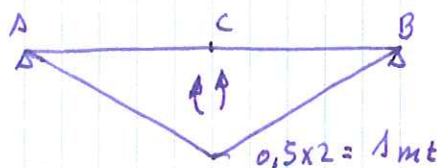
Estructura ①



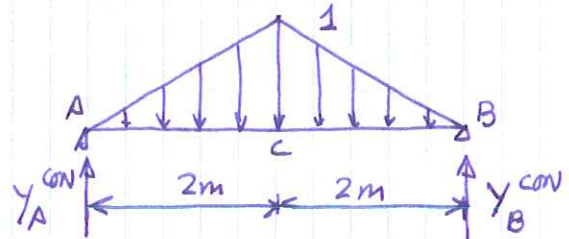
Estructura isostática $\uparrow +$

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 \quad Y_A + Y_B - 1 &= 0 \\ \sum M_A = 0 \quad Y_B \times 4 - 1 \cdot 2 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} Y_A &= 0,5 \text{ T} \\ Y_B &= 0,5 \text{ T} \end{aligned} \right\}$$

Ley de flectores.



Viga conjugada



Calculamos las reacciones en la viga conjugada.

$Y_A^{\text{conv}}, Y_B^{\text{conv}}$ reacciones en la viga conjugada

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 \quad Y_A^{\text{conv}} + Y_B^{\text{conv}} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 &= 0 \\ \sum M_A = 0 \quad Y_B^{\text{conv}} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} Y_A^{\text{conv}} &= 1 \\ Y_B^{\text{conv}} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Viga conjugada:

Giro $\theta = \frac{1}{EI} Q$; $Q = \text{constante en la viga conjugada en la sección considerada.}$

Giro en A

$$\theta_A = \frac{1}{EI} Q_A \quad Q_A = -1 \text{ kV} \quad \text{En los apoyos el constante coincide con la reacción}$$

$$\theta_A = \frac{1}{10^{10}} (-1) = -\frac{1}{10^3} \text{ rad.} \quad \text{como sale negativo entonces el giro es } \curvearrowright$$

Giro en B

$$\theta_B = \frac{1}{EI} Q_B \quad Q_B = 1 \text{ kV}$$

$$\theta_B = \frac{1}{10^{10}} (1) = \frac{1}{10^3} \text{ radianes}$$

Flecha $\delta = \frac{1}{EI} M$; $M = \text{flector en la viga conjugada en la sección considerada}$

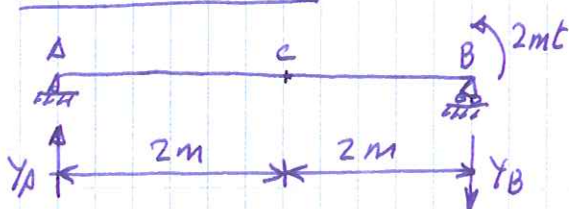
Flecha en C

$$\delta_C = \frac{1}{EI} M_C$$

$$M_C = 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \text{ kV}$$

$$\delta_C = \frac{1}{10^3} \cdot \frac{4}{3} \text{ metros}$$

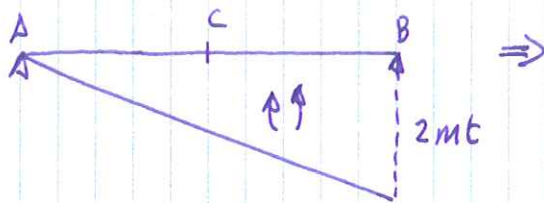
Estructura (2)



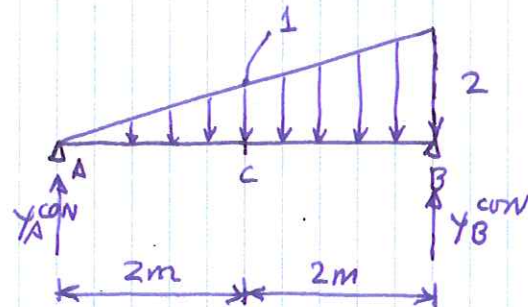
Estructura isostática $\curvearrowright$

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0 & Y_A - Y_B &= 0 \\ \sum M_A &= 0 & 2 - Y_B \cdot 4 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} Y_A = 0,5t \\ Y_B = 0,5t \end{array} \right\}$$

Ley de Flectores



Viga conjugada



Calculamos las reacciones en la viga conjugada

$$\left. \begin{aligned} \sum Y = 0 \quad Y_A^{conv} + Y_B^{conv} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 &= 0 \\ \sum M_A = 0 \quad Y_B^{conv} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} Y_A^{conv} &= \frac{4}{3} \\ Y_B^{conv} &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

De la viga conjugada obtenemos

Cortante en A $Q_A = -\frac{4}{3} \text{ kV} \quad (Y_A^{conv})$

Cortante en B $Q_B = \frac{8}{3} \text{ kV} \quad (Y_B^{conv})$

Flector en C $M_C = Y_A^{conv} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} \text{ kNm} \quad \uparrow$

Giro en A $\theta_A = \frac{1}{EI} \cdot Q_A = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{4}{3} \text{ rad.}$ (como es negativo entonces el giro tiene el sentido $\downarrow$)

Giro en B $\theta_B = \frac{1}{EI} \cdot Q_B = \frac{1}{EI} \cdot \frac{8}{3} \text{ radianes}$

Flecha en C $\downarrow \delta_C = \frac{1}{EI} M_C = \frac{1}{EI} \cdot \frac{6}{3} \text{ m.}$

Como hemos trabajado en T y m. $EI = 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 = 10^{10} \cdot 10^{-3} (10^{-2})^2 = 10^3 \text{ T} \cdot \text{m}^2$

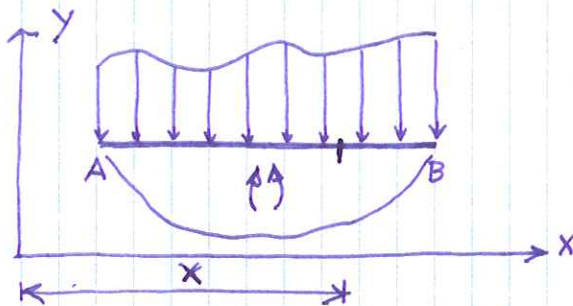
$\theta_A = \frac{4}{3 \times 10^3} \text{ rad.}, \quad \theta_B = \frac{8}{3 \times 10^3} \text{ rad.}, \quad \downarrow \delta_C = \frac{6}{3 \times 10^3} \text{ m} = 2 \text{ mm.}$

EJERCICIO 42

Para las estructuras del ejercicio 41 obtener los giros en los extremos A y B y la flecha en el punto medio C mediante las fórmulas de Bresse.

Resolución

Fórmulas de Bresse para una pieza recta con cargas en su plano:

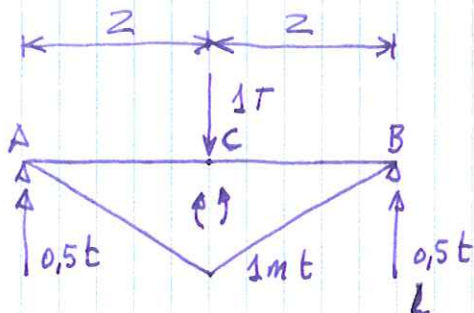


$$\theta_B = \theta_A - \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx$$

$$y_B = y_A + \theta_A (x_B - x_A) - \int_A^B \frac{M(x)}{EI} x (x_B - x) dx$$

$$x_B = x_A$$

Estructura ①



Para calcular el giro en A obligamos a que la flecha en B sea nula (apoyo)

$$\begin{aligned} \downarrow \delta_B &= \downarrow \delta_A + \overrightarrow{\theta}_A (x_B - x_A) - \int_A^B \frac{M(x)}{EI} (x_B - x) dx \\ \downarrow &\quad \downarrow \quad \downarrow L=4 \\ 0 &= 0 + \overrightarrow{\theta}_A \times 4 - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 4 \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow \overrightarrow{\theta}_A = \frac{1}{EI} = \frac{1}{10^3} \text{ rad.} \end{aligned}$$

Por simetría tenemos que $\overleftarrow{\theta}_B = \overrightarrow{\theta}_A = \frac{1}{10^3} \text{ rad.}$

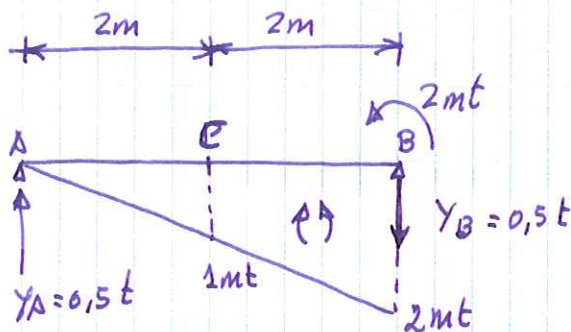
$$\text{Flecha en C} \Rightarrow \downarrow \delta_C = \downarrow \delta_A + \overrightarrow{\theta}_A (x_C - x_A) - \int_A^C \frac{M(x)}{EI} (x_C - x) dx$$

Como $\delta_A = 0$ y $\vec{\theta}_A = \frac{1}{EI}$, resulta

$$\downarrow \delta_C = 0 + \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot (x_A - x_C) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{4}{3} \text{ m}$$

$$\downarrow \delta_C = \frac{1}{10^3} \frac{4}{3}$$

Estructura (2)



Para calcular $\vec{\theta}_A \Rightarrow \delta_B = 0$

Para calcular $\vec{\theta}_B \Rightarrow \delta_A = 0$

$$\downarrow \delta_B = 0 = \downarrow \delta_A + \vec{\theta}_A (x_B - x_A) - \int_A^B \frac{M(x)}{EI} (x_B - x) dx$$

$$\text{En A; } 0 = 0 + \vec{\theta}_A \times 4 - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \Rightarrow \vec{\theta}_A = \frac{1}{EI} \frac{4}{3} = \frac{4}{3 \times 10^3} \text{ rad.}$$

$$\text{En B; } 0 = \downarrow \delta_B + \vec{\theta}_B \times 4 - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \Rightarrow \vec{\theta}_B = \frac{1}{EI} \frac{8}{3} = \frac{8}{3 \times 10^3} \text{ rad.}$$

Flecha en C

$$\downarrow \delta_C = \downarrow \delta_A + \vec{\theta}_A (x_C - x_A) - \int_A^C \frac{M(x)}{EI} (x_C - x) dx ; \begin{cases} \delta_A = 0 \\ \vec{\theta}_A = \frac{4}{3 \times 10^3} \\ x_C - x_A = 2 \text{ m} \end{cases}$$

$$\downarrow \delta_C = 0 + \frac{4}{3 \times 10^3} \cdot 2 - \frac{1}{10^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{6}{3 \times 10^3} \text{ m.}$$

Area hasta C

Aunque no lo piden calculemos el giro en C

$$\vec{\theta}_C = \vec{\theta}_A - \int_A^C \frac{M(x)}{EI} dx = \frac{4}{3 \times 10^3} - \frac{1}{10^3} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3 \times 10^3} \text{ radianes}$$

Ejemplo 2.10.1

Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos de la viga ABC de la Figura 2.22 sometida a la acción de la carga p uniformemente repartida en el tramo BC .

Cálculo de las reacciones

Teniendo en cuenta las condiciones de equilibrio de la estática (suma de fuerzas verticales igual cero y suma de momentos respecto al apoyo A igual a cero, respectivamente), puede escribirse:

$$Y_A + Y_C = p \frac{l}{2} \quad ; \quad Y_C l = p \frac{l}{2} \frac{3l}{4}$$

Por tanto, las reacciones en los apoyos A y C son :

$$Y_A = \frac{1}{8} pl \quad ; \quad Y_C = \frac{3}{8} pl$$

Ley de momentos flectores

La ley de momentos flectores se obtiene calculando, para una sección dada, el momento resultante en la sección de las fuerzas aplicadas a un lado de la misma. En el tramo AB , para una sección a una distancia x del apoyo A , y calculando dorsalmente, se tiene:

$$M(x) = Y_A x = \frac{1}{8} pl x$$

o sea, una ley lineal a lo largo del tramo AB , con un máximo en la sección $x = l/2$, de valor $M_B = pl^2/16$. En el tramo BC , para una sección a una distancia x del apoyo A , y calculando dorsalmente, puede escribirse:

$$M(x) = Y_A x - \frac{p}{2} \left(x - \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{pl}{8} \left[-\frac{4x^2}{l} + 5x - l \right]$$

En este caso, la ley de variación del momento flector es parabólica y la distancia a la que se produce el valor máximo se obtiene derivando respecto a la variable x e igualando a cero:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{pl}{8} \left[-\frac{8x}{l} + 5 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5l}{8}$$

y se tiene:

$$M_{\max} = M\left(x = \frac{5l}{8}\right) = \frac{9}{128} pl^2$$

Obsérvese que la ley de flectores es continua en el punto B , y también lo es su derivada.

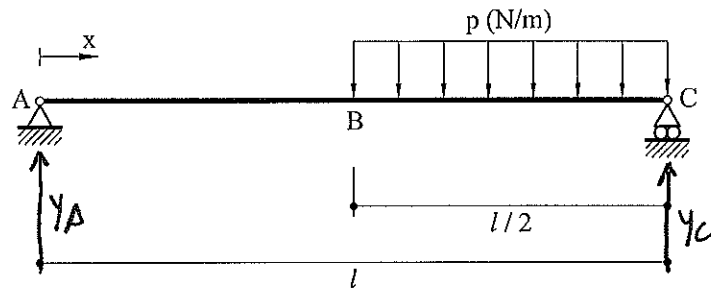


Fig. 2.22: Estructura del Ejemplo 2.10.1

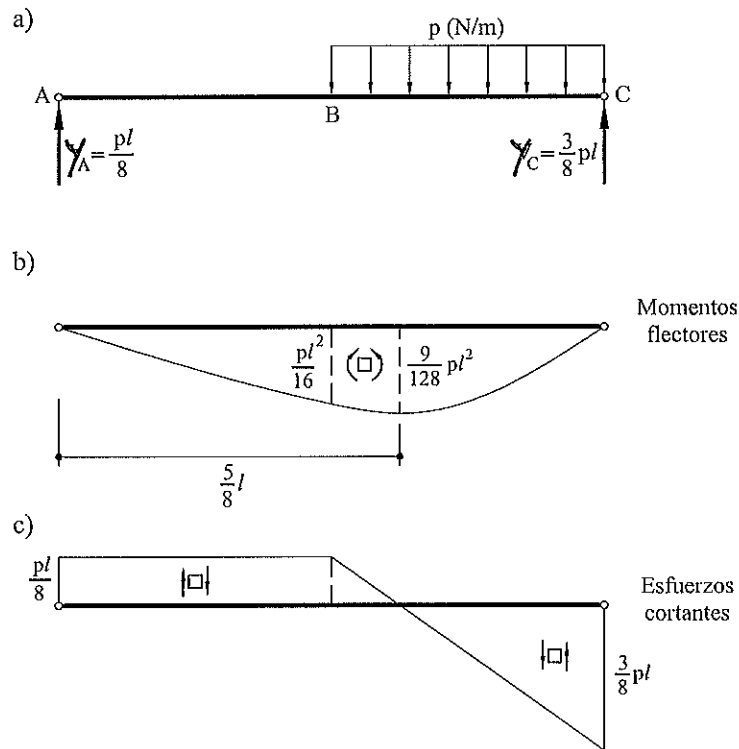


Fig. 2.23: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.1

Nosotros adoptamos el criterio de dibujar los cortantes $\downarrow \uparrow$ por encima de la viga y los cortantes $\uparrow \downarrow$ por debajo de la viga

Ley de esfuerzos cortantes

Calculemos la resultante $\vec{R}$ en una sección cualquiera de la viga sumando las fuerzas aplicadas a un lado de la sección. En este caso la resultante tiene como única componente el esfuerzo cortante $\mathcal{Q}_y$ y, por lo tanto, los axiles son nulos en toda la pieza.

En el tramo AB , calculando dorsalmente, se tiene que la ley de variación es constante de valor igual a la reacción Y_A . En el tramo BC , en una sección situada a una distancia x del apoyo A , y calculando dorsalmente, la proyección de $\vec{R}$ sobre la sección es igual a la suma de la reacción Y_A más la resultante de la carga repartida comprendida entre la sección B y la sección considerada; por tanto, la ley de esfuerzo cortante es lineal. Se tiene:

$$\begin{aligned}\text{Tramo } AB &: \quad \mathcal{Q}_y = Y_A = -\frac{1}{8}pl \\ \text{Tramo } BC &: \quad \mathcal{Q}_y = Y_A + p\left(x - \frac{l}{2}\right) = -\frac{5}{8}pl + px\end{aligned}$$

En las Figuras 2.23a, b y c se representan las reacciones, diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes, respectivamente. Se observa que a una variación constante del cortante le corresponde una variación lineal del flector, y que a una variación lineal del cortante le corresponde una variación parabólica del flector.

Ejemplo 2.10.2

La viga $ABCDE$ de la Figura 2.24 está sometida a una carga puntual P de 200 kN en la sección B y a una carga uniformemente repartida p de 20 kN/m en el tramo CE . Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

Cálculo de reacciones

Aplicando las condiciones de equilibrio (suma nula de fuerzas verticales, suma nula de momentos respecto al punto A y momento flector nulo en las rótulas B y D), y trabajando en kN y m, pueden escribirse las siguientes ecuaciones (ver Figura 2.25):

$$\begin{aligned}Y_A + Y_C + Y_E &= 400 \\ M_A + 10Y_C + 20Y_E &= 4.000 \\ M_A - 5Y_A &= 0 \\ 5Y_E - 250 &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones, se obtienen los valores de las reacciones en el empotramiento A y en los apoyos C y E :

$$\begin{aligned} Y_A &= 100 \text{ kN} & ; & & Y_C &= 250 \text{ kN} \\ M_A &= 500 \text{ kN} \cdot \text{m} & ; & & V_E &= 50 \text{ kN} \end{aligned}$$

Ley de momentos flectores

En el tramo AB , cortando la estructura a una distancia x del apoyo A y calculando el momento flector dorsalmente se obtiene:

$$M(x) = -M_A + Y_A x = -500 + 100x$$

que es una ley lineal. Para $x = 5$ m se tiene $M_B = 0$, como corresponde a una rótula. En el tramo BC se tiene:

$$M(x) = -M_A + Y_A x - 200(x - 5) = 500 - 100x$$

que es también una ley lineal. Para $x = 10$ m se tiene el momento en el apoyo C , $M_C = -500$ kN·m. En el tramo CE , se tiene que:

$$\begin{aligned} M(x) &= 500 - 100x + Y_C (x - 10) - \frac{p}{2}(x - 10)^2 \\ &= -3.000 + 350x - 10x^2 \end{aligned}$$

que es una ley parabólica, con su valor máximo situado a una distancia $x_{\max}$ del apoyo A que puede determinarse igualando a cero la derivada de la ley de momentos respecto a la variable x . En este caso, $x_{\max} = 17,5$ m y el valor del momento correspondiente es $M_{\max}(x = x_{\max}) = 62,5$ kN·m.

Ley de esfuerzos cortantes

Calculando la resultante de las fuerzas situadas a un lado de la sección y determinando la componente paralela a la misma se obtiene la variación del esfuerzo cortante en cada tramo de la estructura. En el tramo AB , y calculando dorsalmente, dicha resultante es constante e igual a V_A :

$$Q_u = Y_A = -100 \text{ kN}$$

En el tramo BC , la resultante de las fuerzas a un lado de la sección es también un valor constante, igual a la suma de la reacción V_A más la fuerza aplicada en B :

$$Q_u = Y_A + 200 = 100 \text{ kN}$$

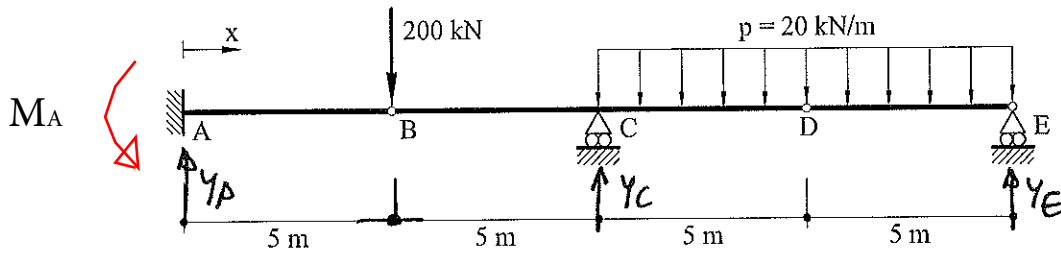


Fig. 2.24: Estructura del Ejemplo 2.10.2

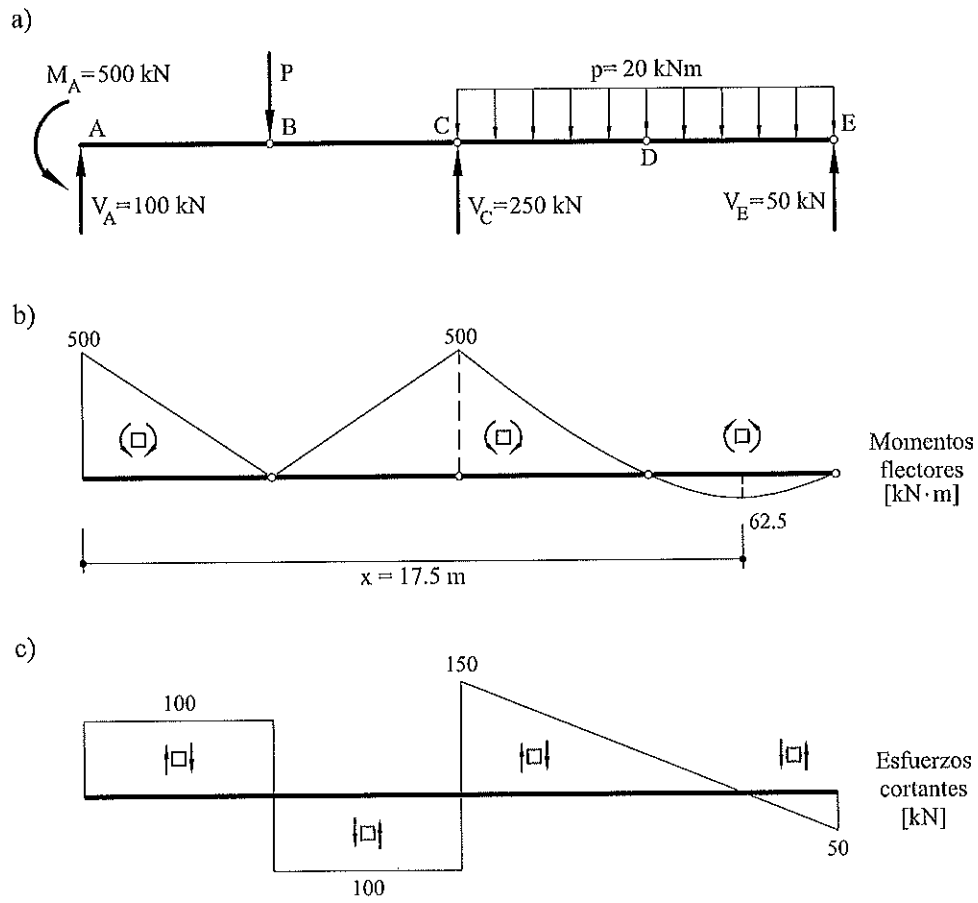


Fig. 2.25: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.2

Por último, en el tramo CE y siguiendo el mismo procedimiento se obtiene:

$$Q_y = 100 - 250 + 20(x - 10) = -350 + 20x$$

que es una ley lineal. Nótese que en cada tramo la ley de esfuerzos cortantes coincide con la derivada de la ley de momentos flectores respecto a la variable x (cambiada de signo), tal como exige el equilibrio de la rebanada.

En las Figuras 2.25a, b y c se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la viga ABC .

Ejemplo 2.10.3

La estructura $ABCD$ de la Figura 2.26 está empotrada en la sección A y sometida a una carga vertical p de 30 kN/m, uniformemente repartida sobre el eje de la viga CBD , inclinada un ángulo α respecto a la horizontal. Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

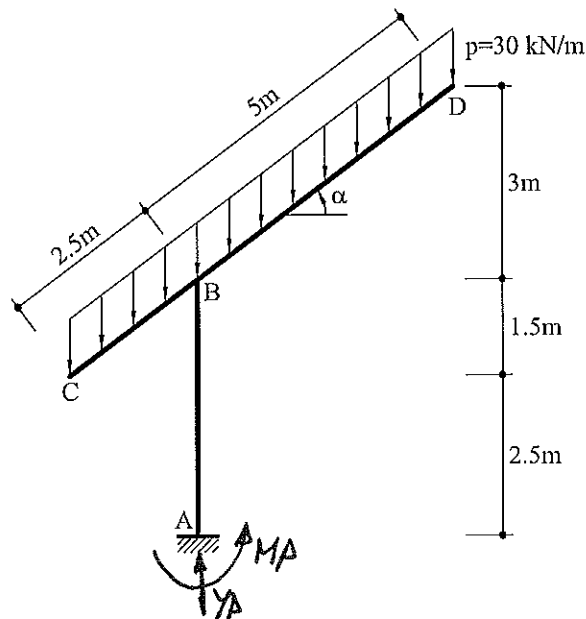


Fig. 2.26: Estructura del Ejemplo 2.10.3

Cálculo de reacciones

Partiendo de las ecuaciones de equilibrio se calculan en primer lugar las reacciones externas. Imponiendo que la suma de fuerzas verticales y la suma de momentos en el empotramiento A sean cero, se tiene (ver Figura 2.27a):

$$\begin{aligned} R_A &= 30 \cdot 7,5 = 225 \text{ kN} \\ M_A &= 225 \cdot (5 - 3,75) \cos \alpha = 225 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

donde α es el ángulo de inclinación de las barras BC y BD .

Ley de momentos flectores

Calculando dorsalmente se tiene que la ley de momentos flectores en el pilar AB es constante y de valor $M_A = 225 \text{ kN} \cdot \text{m}$. En la viga CB , para una sección a una distancia s del extremo C (ver Figura 2.27b), se tiene:

$$M(x) = -30 s \frac{x}{2} = -15 s x = -15 \frac{x^2}{\cos \alpha}$$

La ley de flectores es parabólica y para $x = 2 \text{ m}$ se obtiene $M_B = -75 \text{ kN} \cdot \text{m}$, valor del momento flector en la sección B del tramo CB . Análogamente, en la viga BD , para una sección a una distancia s_1 del extremo D (ver Figura 2.27b) se obtiene:

$$M(x_1) = -30 s_1 \frac{x_1}{2} = -15 s_1 x_1 = -15 \frac{x_1^2}{\cos \alpha}$$

ley parabólica que para $x_1 = 4 \text{ m}$ toma el valor del momento flector en la sección B del tramo BD , $M_B = -300 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Ley de esfuerzos cortantes

Calculando dorsalmente se tiene que la ley de esfuerzo cortante en el pilar AB es cero. Nótese que la ley de momentos flectores en el pilar AB es constante y, en consecuencia, su derivada primera es nula.

En los tramos CB y BD se tiene, proyectando la resultante de fuerzas sobre el plano de la sección:

$$\begin{aligned} Q_{CB} &= 30 s \cos \alpha = 30 x \\ Q_{BD} &= (30 s - 225) \cos \alpha = 30 x - 225 \cos \alpha \end{aligned}$$

Ambas leyes son lineales, como corresponde a una variación parabólica del flector.

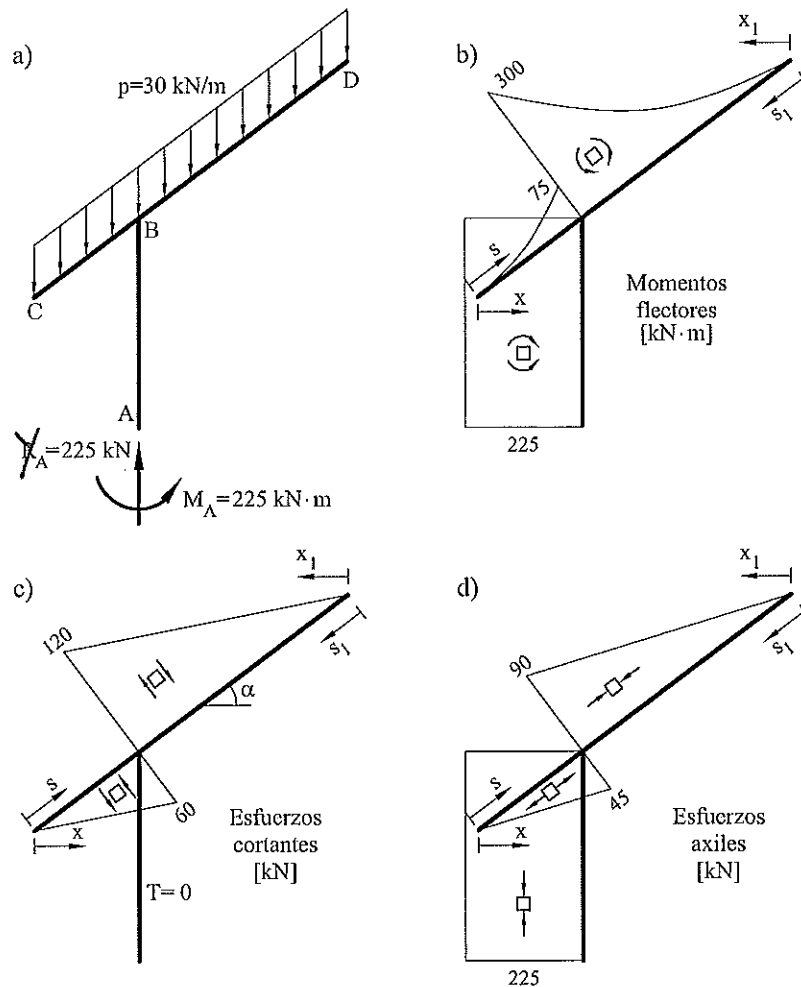


Fig. 2.27: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.3

Ley de esfuerzos axiales

Calculando dorsalmente se tiene que la ley de esfuerzo axial en el pilar AB es de compresión, constante y de valor $N = 225$ kN.

En los tramos CB y BD la ley de axiles se obtiene proyectando la resultante de fuerzas sobre la normal al plano de la sección. Se tiene:

$$\begin{aligned} N_{CB} &= 30 s \sin \alpha \\ N_{BD} &= (30 s - 225) \sin \alpha \end{aligned}$$

Ambas leyes son lineales, como corresponde a una carga uniforme. Obsérvese que, sobre cada sección, la composición vectorial de los correspondientes esfuerzos cortante y axil es igual a la resultante de fuerzas $\vec{R}$ sobre la sección, que es una fuerza vertical.

En las Figura 2.27 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

Ejemplo 2.10.4

El pórtico de la Figura 2.28 está sometido a una carga p de 20 kN/m, uniformemente distribuida según la proyección horizontal del dintel BC , y a dos fuerzas concentradas horizontales de 30 kN que actúan en las secciones E y F (estas fuerzas puntuales representan un cable postesado anclado en los nudos E y F). Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

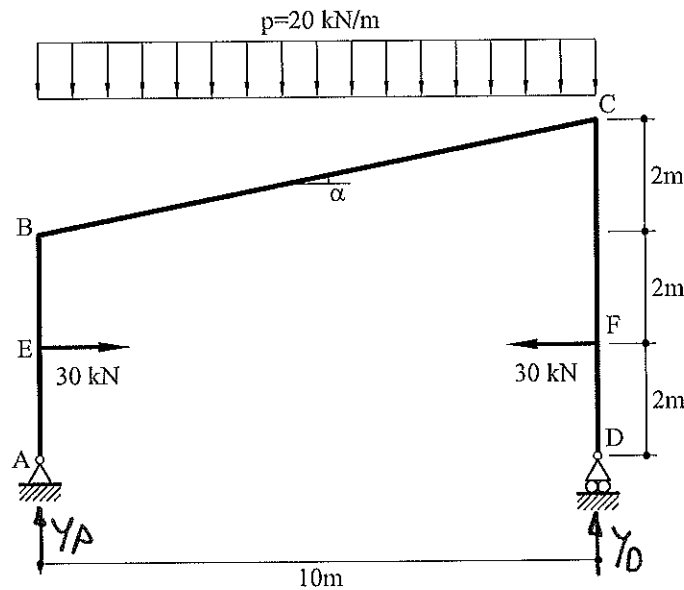


Fig. 2.28: Estructura del Ejemplo 2.10.4

Cálculo de reacciones

Se calculan en primer lugar las reacciones en los apoyos utilizando las condiciones de equilibrio. Se obtiene que la reacción horizontal H_A es nula y:

$$\begin{aligned} Y_A + Y_D &= 200 \\ 10Y_D &= 20 \cdot 10 \cdot 5 \end{aligned}$$

y, por lo tanto:

$$Y_A = 100 \text{ kN} \quad ; \quad Y_D = 100 \text{ kN}$$

Ley de momentos flectores

En los tramos AE y DF de ambos pilares la ley de momentos flectores es nula. Continuando con el pilar AB , a partir de la sección E , y calculando dorsalmente, se obtiene:

$$M(s) = -30s$$

siendo s la distancia desde E . Es una ley de variación lineal que para $s = 2 \text{ m}$ proporciona el valor del momento flector en la sección B , $M_B = -60 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

Análogamente, en el pilar DC se obtiene:

$$M(s_1) = -30s_1$$

siendo s_1 la distancia desde F . Es una ley de variación lineal que en la sección C ($s_1 = 4 \text{ m}$) toma el valor $M_C = -120 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

En el dintel BC , para una sección a una distancia x de la sección B , se tiene

$$M(x) = Y_A x - 30 \left(2 + \frac{2}{10} x \right) - 20 \frac{x^2}{2} = -60 + 94x - 10x^2$$

que es una ley parabólica, con su valor máximo situado a una distancia $x_{\max}$ de la sección B , que puede determinarse igualando a cero la derivada de la ley de momentos respecto a la variable x . En este caso, $x_{\max} = 4,7 \text{ m}$ y el valor del momento correspondiente es $M_{\max}(x = x_{\max}) = 160,9 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

Ley de esfuerzos cortantes

El esfuerzo cortante en el primer tramo AE del pilar AB es nulo. A partir de la sección E el valor del esfuerzo cortante coincide con la fuerza horizontal aplicada en dicha sección. Por tanto, la ley es constante y de valor:

$$Q_{EB} = 30 \text{ kN}$$

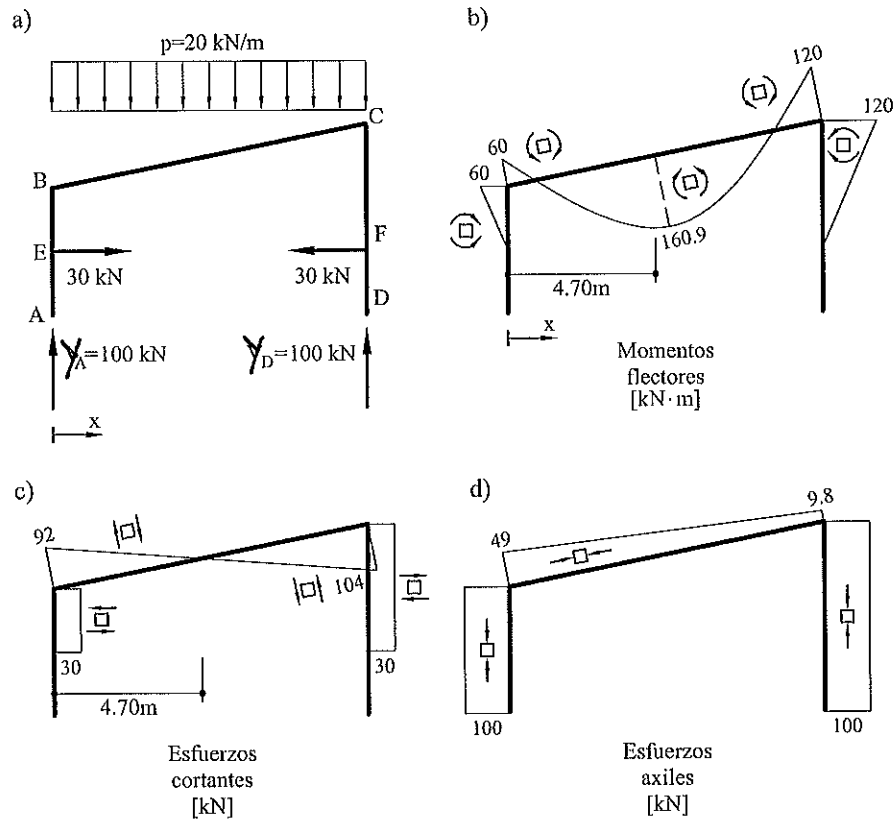


Fig. 2.29: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.4

Análogamente, en el pilar DC se tiene un valor de cortante nulo hasta la sección F . En el tramo de pilar FC la ley de esfuerzo cortante es constante, de valor coincidente con el valor de la fuerza horizontal aplicada en F :

$$Q_{FC} = 30 \text{ kN}$$

En el tramo BC , inclinado un ángulo α respecto a la horizontal, para una sección situada a una distancia x del extremo B la proyección de la resultante de las fuerzas sobre el plano de la sección es igual a:

$$Q_{BC} = (-V_A + 20x) \cos \alpha + 30 \sin \alpha$$

que es una ley lineal, de valor $T_B = -92,17 \text{ kN}$ para la sección B ($x = 0$). Nótese que para $x = 4,7 \text{ m}$ el valor del esfuerzo cortante es cero, como corresponde a la sección de máximo momento en el tramo BC .

Ley de esfuerzos axiles

En los pilares AB y CD los axiles son de compresión, constantes y de valor igual a las reacciones verticales en los respectivos apoyos. Por tanto,

$$N_{AB} = N_{CD} = 100 \text{ kN}$$

En el tramo BC , calculando dorsalmente, se tiene

$$N_{BC} = (-100 + 20x) \sin \alpha - 30 \cos \alpha$$

que es una ley lineal, con los valores extremos $N_B = -49 \text{ kN}$ y $N_C = -9,8 \text{ kN}$ para las secciones B y C , respectivamente.

En la Figura 2.29 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

Ejemplo 2.10.5

Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos para la estructura de la Figura 2.30, sometida a una fuerza horizontal F actuando en la sección D .

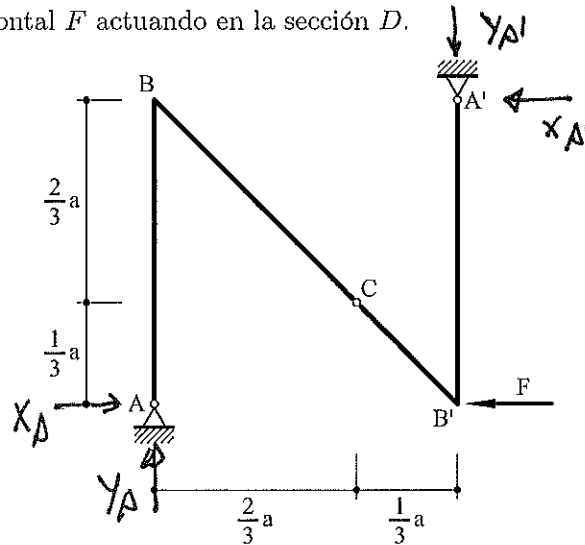


Fig. 2.30: Estructura del Ejemplo 2.10.5

Cálculo de reacciones

Se calculan en primer lugar las reacciones en los apoyos utilizando las condiciones de equilibrio de fuerzas y momentos (en A) y la condición de momento flector nulo en la rótula C (calculado dorsalmente). Se tiene (ver Figura 2.31a):

$$\begin{aligned} \cancel{Y}_A - \cancel{X}_{A'} - F &= 0 \\ \cancel{Y}_A - \cancel{Y}_{A'} &= 0 \\ \cancel{X}_{A'} a - \cancel{Y}_{A'} a &= 0 \\ \cancel{X}_A \frac{2a}{3} - \cancel{X}_{A'} \frac{a}{3} &= 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$\cancel{Y}_A = \cancel{Y}_{A'} = F \quad ; \quad \cancel{X}_A = 2F \quad ; \quad \cancel{X}_{A'} = F$$

Ley de momentos flectores

En el pilar AB , para una sección situada a una distancia y del apoyo A , se tiene

$$M_{AB} = -\cancel{X}_A y = -2Fy$$

ley de momento flector lineal, que para $y = a$, proporciona el valor del momento flector en la sección B , $M_B = -2Fa$. En el pilar $B'A'$, para una sección situada a una distancia $(a - y)$ de la sección A' se tiene

$$M_{B'A'} = \cancel{X}_{A'} (a - y) = F(a - y)$$

ley de momentos lineal con valor máximo $M_{B'} = Fa$. En el tramo BB' , para una sección situada a una distancia x, y del apoyo A , puede escribirse

$$M_{BB'} = -\cancel{X}_A y + \cancel{Y}_A x = F(x - 2y)$$

ley de momento flector lineal, con valores extremos $M_B = -2Fa$ y $M_{B'} = Fa$.

Ley de esfuerzos cortantes

Al ser lineales las leyes de flectores en todas las barras, los cortantes son uniformes en cada una de ellas. En los pilares se tiene

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= \cancel{X}_{A'} = 2F \\ Q_{B'A'} &= \cancel{X}_{A'} = F \end{aligned}$$

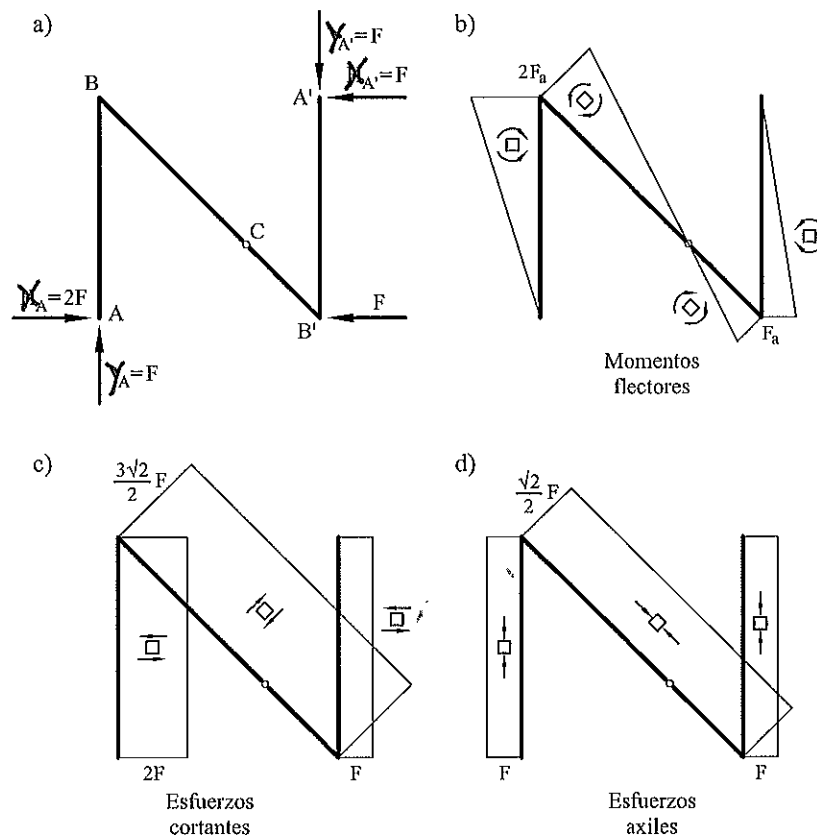


Fig. 2.31: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.5

valores coincidentes con las reacciones horizontales. En la barra BB' se tiene

$$Q_{BB'} = \frac{\sqrt{2}}{2} (Y_A + X_A) = \frac{3\sqrt{2}}{2} F$$

Ley de esfuerzos axiles

Procediendo de manera similar al apartado anterior, se halla la componente de R normal a las secciones, y se obtienen los valores del esfuerzo axil, constantes en cada pieza.:

$$N_{AB} = -F \quad ; \quad N_{BB'} = -\frac{\sqrt{2}}{2} F \quad ; \quad N_{B'A'} = -F$$

En las Figura 2.31 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

Ejemplo 2.10.6

El pórtico isostático de la Figura 2.32 está sometido a una carga p de 20 kN/m, uniformemente distribuida en el dintel BD . Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

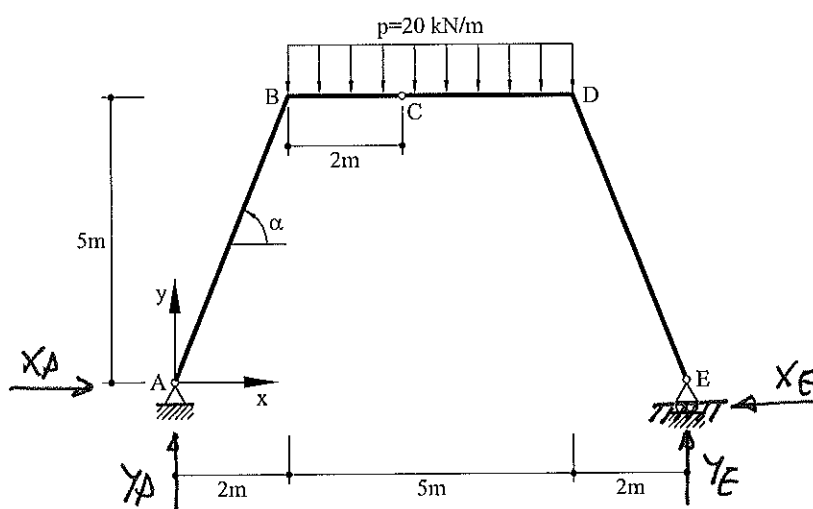


Fig. 2.32: Estructura del Ejemplo 2.10.6

Cálculo de reacciones

Se calculan en primer lugar las reacciones en los apoyos utilizando las ecuaciones de equilibrio y la condición de que el momento flector en la rótula sea nulo. Se tiene (ver Figura 2.33a):

$$\begin{aligned} X_A - X_E &= 0 \\ Y_A + Y_E &= 20 \cdot 5 \\ 9Y_A &= 20 \cdot 5 \cdot 4,5 \\ 4Y_A - 5X_A &= 20 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

y, por tanto, las reacciones son:

$$Y_A = Y_E = 50 \text{ kN} \quad ; \quad X_A = X_E = 32 \text{ kN}$$

Obsérvese que las reacciones son simétricas, a pesar de la posición asimétrica de la rótula.

Ley de momentos flectores

En una sección genérica del tramo AB , utilizando los ejes de referencia (x, y) de la Figura 2.32 y calculando de forma dorsal, se tiene:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= Y_A x - X_A y \\ &= 50 x - 32 y \end{aligned}$$

ley lineal con valor máximo $M_B = -60 \text{ kN}\cdot\text{m}$. En el tramo DE , procediendo ahora frontalmente, se obtiene también una ley lineal, simétrica respecto al eje vertical que pasa por el centro del dintel:

$$\begin{aligned} M_{DE} &= Y_E (9 - x) - X_E y \\ &= 50 (9 - x) - 32 y \end{aligned}$$

En el dintel BD , trabajando dorsalmente, se puede escribir:

$$\begin{aligned} M_{BD} &= Y_A x - X_A y - \frac{p}{2}(x-2)^2 \\ &= 50 x - 32 \cdot 5 - \frac{20}{2}(x-2)^2 = -10 x^2 + 90 x - 200 \end{aligned}$$

que es una ley parabólica que se anula en la rótula y tiene valores máximos en los extremos $M_B = M_D = -60 \text{ kN}\cdot\text{m}$. El valor del flector en el centro es de $2,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

Obsérvese que, dada la simetría de las cargas y reacciones, los flectores en la estructura son simétricos respecto al eje vertical central.

Ley de esfuerzos cortantes

En los pilares AB y DE los cortantes son constantes, ya que la ley de flectores en ellos es lineal. Su valor se obtiene proyectando sobre la sección las componentes de la reacción en A y E , respectivamente:

$$\begin{aligned} T_{AB} &= -Y_A \cos \alpha + X_A \sin \alpha = 11 \text{ kN} \\ T_{DE} &= -Y_E \cos \alpha + X_E \sin \alpha = 11 \text{ kN} \end{aligned}$$

donde α es el ángulo de inclinación de los soportes. En el tramo BD , calculando dorsalmente, se tiene

$$\begin{aligned} T_{BD} &= -Y_A + p (x-2) \\ &= -50 + 20 (x-2) \end{aligned}$$

que es una ley lineal con valores extremos $T_B = -Y_A$ y $T_D = Y_E$, y de valor nulo en el centro del dintel, por simetría.

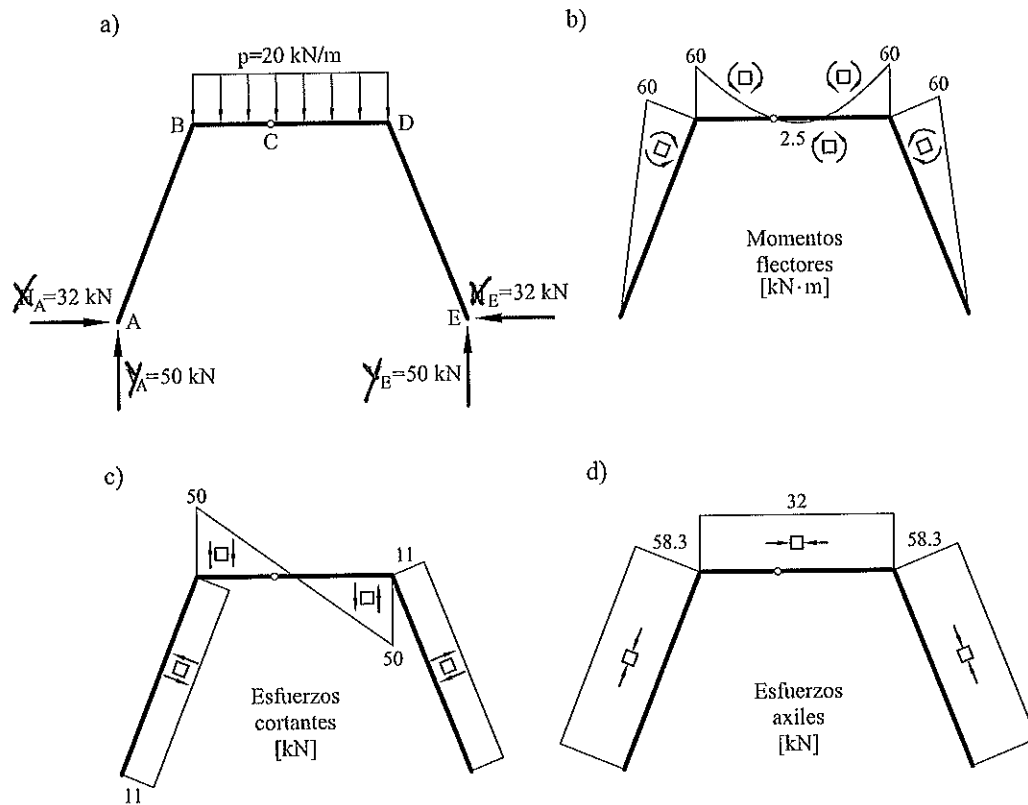


Fig. 2.33: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.6

Ley de esfuerzos axiales

Procediendo de manera similar, se calculan los axiles en cada barra. Sobre los soportes, basta con proyectar sobre sus direcciones respectivas las reacciones horizontales y verticales de los apoyos correspondientes. En el dintel se sigue el mismo procedimiento, ya que la proyección de la carga lateral sobre la barra es nula.

Se obtienen así las leyes de esfuerzos axiales

$$\begin{aligned} N_{AB} &= N_{DE} = -(Y_A \sin \alpha + X_A \cos \alpha) = -58,3 \text{ kN} \\ N_{BD} &= -X_A = -32 \text{ kN} \end{aligned}$$

Se observa que son leyes constantes en cada tramo y, además, son simétricas.

En la Figura 2.33 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.